مبادئ التحليل الرياضي

Principles of Mathematical Analysis

تأليف

وولتر رودن

ترجمة

الأستاذ الدكتور / عبد السميع عبد الرزاق الجنابي

بغداد - الجامعة المستنصرية

دار الكتاب الجامعي
UNIVERSITY BOOK HOUSE

العيـــن

٢٠٠٢

المحتويات

الموضوع	الصفحة
بطاقة فهرسة الكتاب	٢
المقدمة	١١
التمهيد	١٣
الفصل الأول	
منظومتي الأعداد الحقيقية والعقدية	
– مقدمة	١٧
المجموعات المرتبة	١٩
الحقول	٢٢
الحقل الحقيقي	٢٦
النظام الموسع للأعداد الحقيقية	٣٠
الحقل المركب	٣١
الفضاءآت الإقليدية	٣٥
ملحق	٣٧
تمارين	٤٤
الفصل الثاني	
أساسيات الطبولوجيا	
المجموعات المحدودة ، القابلة والغير قابله للعد	٤٩
الفضاءآت المترية	٥٧
المجوعات المتراصة	٦٤
المجوعات التامة	٧٠
المجوعات المترابطة	٧٢

الموضــــوع	الصفحة
تمارين	٧٤

الفصل الثالث
المتتاليات والمتسلسلات العددية

المتتاليات المتقاربة	٨١
اللواحق (المتتاليات الجزئية)	٨٥
متتاليات كوشي	٨٧
الغايات العليا والسفلى	٩١
بعض المتتاليات (المتتابعات) الخاصة	٩٣
المتسلسلات	٩٤
متسلسلات الحدود الغير سالبة	٩٧
العدد e	١٠٠
الاختبارين الجذري والنسبي	١٠٢
متسلسلات القوى	١٠٦
الجمع بالتجزئة (الأجزاء)	١٠٧
التقارب المطلق	١٠٩
جمع وضرب المتسلسلات	١١٠
إعادة الترتيب	١١٣
تمارين	١١٧

الفصل الرابع
الاستمرارية

غايات الدوال	١٢٥
الدوال المستمرة	١٢٧
الاستمرارية والتراص	١٣٢
الاستمرارية والترابط	١٣٧

الموضـــوع	الصفحة

عدم الاستمرارية (التفاصل) ١٣٨
الدوال الرتيبة ١٣٩
الغايات اللانهائية و الغايات عند اللانهائية ١٤٢
تمارين ١٤٤

الفصل الخامس
التفاضل

مشتقة الدوال الحقيقية ١٥٣
مبرهنات القيمة الوسطى ١٥٧
استمرارية المشتقات ١٥٨
قاعدة آل هوبتال ١٥٩
مشتقات الرتبة الأعلى ١٦١
مبرهنة تيلر ١٦١
تفاضل الدوال ذات القيم المتجهة ١٦٢
تمارين ١٦٦

الفصل السادس
متكامل ريمان - ستيلجز

تعريف ووجود المتكامل ....
خواص المتكامل ....
التكامل و التفاضل ....
تكامل دوال القيم – المتجهة ....
المنحنيات الممكن تحديد طول أقواسها ....
تمارين ....

الموضـــوع	الصفحة

الفصل السابع
المتتاليات والمتسلسلات الدوال

مناقشة المسألة الرئيسية ٢٠٥

التقارب المنتظم ٢٠٩

التقارب المنتظم والاستمرارية ٢١١

التقارب المنتظم و التكامل ٢١٤

التقارب المنتظم و التفاضل ٢١٥

عوائل الدوال المتساوية الاستمرارية ٢١٨

مبرهنة ستون – ويرستراس ٢٢٣

تمارين ٢٣٢

الفصل الثامن
بعض الدوال الخاصة

متسلسلات القوى ٢٤٣

الدوال الآسية واللوغاريتمية ٢٤٩

الدوال المثلثية ٢٥٤

الكمال الجبري للحقل المركب ٢٥٧

متسلسلة فوريّه ٢٥٨

دالة كاما Γ ٢٦٥

تمارين ٢٧١

الفصل التاسع
دوال المتغيرات المتعددة

التحويلات الخطية ٢٨٣

التفاضل ٢٩٢

مبدأ الانكماش (التقليص) ٣٠٢

الموضـــوع	الصفحة

مبرهنة الدالة العكسية ٣٠٤
مبرهنة الدالة الضمنيّة ٣٠٧
مبرهنة الرتبة ٣١٢
المحددات ٣١٧
المشتقات ذات الرتبة الأعلى ٣٢١
تفاضل المتكاملات ٣٢٣
تمارين ٣٢٦

الفصل العاشر
تكامل الصيغ القابلة للتفاضل

التكامل ٣٣٧
التطبيقات الأولية ٣٤٠
تجزئة الوحدة ٣٤٣
تغيير المتغيرات ٣٤٤
الصيغ القابلة للتفاضل ٣٤٦
المفردات و السلاسل ٣٦٢
مبرهنة ستوك ٣٧٠
الصيغ المغلقة و الصيغ الدقيقة ٣٧٣
تحليل المتجه ٣٨٠
تمارين ٣٨٩

الفصل الحادي عشر
نظرية لبيك

دوال المجموعة ٤٠٥
تكوين مقياس لبيك ٤٠٧
فضاءآت القياس ٤١٦

الموضوع	الصفحة

الدوال القابلة للقياس ٤١٧
الدوال البسيطة ٤٢٠
التكامل ٤٢١
المقارنة مع متكامل ريمان ٤٣٠
تكامل الدوال المركبة ٤٣٢
دوال من الصنف L^2 .... ٤٣٣
تمارين ٤٤٢

الدليل

سجل المراجع ٤٤٧
قائمه بالرموز الخاصة ٤٤٩
دليل إنكليزي – عربي ٤٥٢
دليل عربي – إنكليزي ٤٧٣

مُقَدِّمَة:

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وتعم الخيرات والبركات وتزول الكر بات وبنوره تتبدد الظلمات والصلاة والسلام على سيد السادات المبعوث رحمةً للعالمين وقائد الغر المحجلين. وبعد..

فإن كتاب مبادئ التحليل الرياضي *(Principles of Mathematical Analysis)* الذي كتبه الأستاذ وولتر رودن **Walter RUDIN** يعتبر واحد من أهم الكتب في التحليل الرياضي لما يحويه من معلومات وأسلوب رصين ومستوى علمي رفيع وهو قاعدة أساسية لكل من يرغب في اختصاص الرياضيات وهو مترجم إلى اغلب لغات العالم ورغبتي في إغناء المكتبة العربية بواحد من أمهات الكتب في الرياضيات. كما يمكن اعتماده كتاباً منهجياً للصفوف المتقدمة في أقسام الرياضيات أي يمكن أن يدرس للسنة الدراسية الثالثة والرابعة بمعدل ثلاث ساعات في الأسبوع، أو اعتماده كتاب منهجي للسنة الدراسية الأولى لطلبة الماجستير في الرياضيات.

وجدت نفسي راغبا في ترجمة هذا الكتاب. أسأل الله العلي القدير أن يحقق النفع به ويجعل هذا العمل خالصا لوجهه ومرضاته إنه سميع مجيب الدعاء والحمد لله رب العالمين. وصلى الله على محمد وعلى آله وصحبه وسلم.

عبد السميع عبد الرزاق الجنابي

تمهيد:

يهدف هذا الكتاب لأن يستخدم كمرجع في دروس ومحاضرات التحليل الرياضي التي يتلقاها طلاب البكالوريوس – المراحل المتقدمة – بصوره عامه، أو طلاب الصفوف الجامعية الأولي الذين يدرسون الرياضيات.

تعطي هذه الطبعة من الكتاب بشكل أساسي نفس المواضيع التي تضمنتها الطبعة الثانية منه، مع بعض الإضافات والقليل من المحذوفات البسيطة بالإضافة إلي إعادة ترتيب المواضيع بشكل كبير. إنني أمل أن تساهم هذه التغييرات بجعل المادة العلمية للكتاب اكثر وضوحا وجاذبيه للطلاب الذين يتلقون مثل هذه الدروس.

إن تجربتي وخبرتي في التدريس قد أقنعتني بان البدء ببناء الأعداد الحقيقية من خلال الأعداد النسبية أمر غير محبذ أحيانا على الرغم من صحته منطقيا. في بادئ الأمر قد لا يتمكن معظم الطلاب من تقدير الحاجة الداعية لهذا الإجراء. وفقا لذلك فقد تم تقديم نظام الأعداد الحقيقية على أساس انه حقل مرتب يمتلك خاصية الحد العلوي الأصغر، وقد تم تقديم بعض التطبيقات الممتعة والمهمة لهذه الخاصية في حينها. على الرغم من ذلك فان بناء الأعداد الحقيقية وفق طريقه ديدكند **Dedekind's Construction** لم يتم حذفها وإنما وضعت على شكل ملحق للفصل الأول، وبذلك فانه بالإمكان دراستها والتمتع بها كلما سنح الوقت بذلك.

أعيد كتابة موضوع الدوال ذات المتغيرات المتعددة بشكل كامل تقريبا مع إضافة العديد من التفاصيل الموضحة والأمثلة والحوافز. وقد تم تسهيل برهنة مبرهنة الدالة العكسية – الموضوع الرئيسي في الفصل التاسع – باستخدام نظريه النقطة الصامدة لتقليص الرسوم.فقد تمت مناقشة أشكال التفاضل بصوره اكثر إسهابا أضافه إلى إدخال تطبيقات متعددة لمبرهنة ستوك **Stokes 'theorem**.

وبالنسبة للمتغيرات الأخرى، فقد تم تقليص الفصل المتعلق بتكامل ريمان – ستيلجيز **Riemann Stieltjes**، وتم إضافة فقرة قصيرة إلى دالة كاما **gamma** في الفصل الثامن، وتم إضافة أعداد كبيره من التمارين الجديدة تحتوي معظمها على بعض التوضيحات والإرشادات المتعلقة بطريقة حلها.

وقد قمت أيضا بالإشارة إلى العديد من المقالات التي تظهر في بعض المجلات العلمية *مثل* *America Mathematical Monthly* وفي *Mathematics Magazine*، متوخيا بذلك

أن يتطور عند الطلاب عادة البحث والتقصي في المجالات العلمية، وقد زودني مشكورا بمعظم هذه المقالات السيد آر. بي. بيركل **R. B. Burckel**.

خلال السنوات الماضية قام العديد من المهتمين، طلابا وأساتذة، بإرسال بعض التصحيحات، والانتقادات وبعض الملاحظات الأخرى فيما يخص الطبعات السابقة من هذا الكتاب.

وفي الوقت الذي أقدر مثل هذه المراسلات، أنتهز هذه الفرصة لأعرب فيها عن جزيل شكري لكل من ساهم بذلك.

وولتر رودن

WALTER RUDIN

الفصل الأول

منظومتي الأعداد الحقيقية والعقدية

- المقدمة
- المجموعات المرتبة
- الحقول
- الحقل الحقيقي
- النظام الموسع للأعداد الحقيقية
- الحقل المركب
- الفضاءآت الإقليدية
- ملحق
- تمارين

الفصل الأول
منظومتي الأعداد الحقيقية والعقدية
The Real and Complex Number Systems

مقدمة

أن الطرح الموضوعي للمفاهيم الرئيسية للتحليل الرياضي (مثل التقارب، الاستمرارية، التفاضل، والتكامل) يجب أن يبنى على أساس مفهوم دقيق و محدد للأعداد. وسوف لا ندخل هنا بمناقشة البديهيات التي تحكم حساب الأعداد الصحيحة، ولكننا نفترض إلمام القارئ بموضوع الأعداد النسبية *rational numbers* (أي الأعداد التي على شكل $\frac{m}{n}$، حيث m و n أعداد صحيحة و n لا تساوي صفر).

أن نظام الأعداد النسبية كحقل ومجموعة مرتبة، لا يفي بصوره كاملة بالعديد من الأغراض. (سوف نحدد هذه المصطلحات بالبندين ١، ٦ و ١، ١٢). على سبيل المثال، لا يوجد هنالك عدد نسبي p يحقق المعادلة $p^2 = 2$. (سوف نبرهن هذا قريبا). أن هذه المسألة أدت إلى ظهور ما يسمى " الأعداد الغير النسبية" *irrational number* والتي غالبا ما تكتب على شكل مفكوكات عشرية لا نهائية يتم تقريبها إلى أعداد عشرية محدده. لذلك فإن المتتالية

$$1, 1.4 , 1.41 , 1.414 , 1.4142 ,. . .$$

"تنتهي إلى $\sqrt{2}$" ولكن ما لم يتم تحديد العدد الغير نسبي $\sqrt{2}$ بصورة دقيقه، فإن السؤال الذي يطرح نفسه هو: إلى ماذا تنتهي هذه المتتالية بالضبط ؟

أن سؤالا كهذا يمكن الإجابة عليه بعد تقديم ما يسمى "نظام الأعداد الحقيقية ".

١، ١ مثال: نبين الآن أن المعادلة

$$p^2 = 2 \qquad (١)$$

لا يمكن أن تتحقق من قبل أي عدد نسبي p . لو كان يوجد هنالك مثل هذا العدد، لكان بإمكاننا أن نكتب $p = \frac{m}{n}$ حيث n و m عددين صحيحين ليسا زوجيين بنفس الوقت. لنفترض أن هذا قد حدث. عندها فإن المعادلة (١) تدل ضمنا على أن

$$m^2 = 2n^2 \ , \qquad (٢)$$

إن هذا يبين أن m^2 هو عدد زوجي. عندها فإن m هو عدد زوجي (إذا كان m فرديا، فإن m^2 سيكون فرديا أيضا)، وكذلك أن m^2 يقبل القسمة على ٤. أن هذا يؤدي إلى أن الجانب الأيمن من المعادلة (٢) يقبل القسمة على ٤ أيضا، وهذا فإن n^2 هو عدد زوجي، الأمر الذي يؤدي إلى أن n هو عدد زوجي.

إن صحة المعادلة (١) تؤدي إلى الاستنتاج بأن كلاً من m و n عددان زوجيان، خلافا لاختيارنا لـــ m و n. لذلك فإن المعادلة (١) مستحيلة للعدد النسبي p.

سنقوم الآن بتفحص هذا الموضوع بصوره اكثر دقه. لتكن A المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية الموجبة p بحيث $p^2 < 2$ ولتكن B المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية الموجبة p بحيث $p^2 > 2$. وسوف نبين أن A ***لا تحتوي على اكبر عدد contains no largest number*** وB ***لا تحتوي على اصغر عدد contains no smallest number***.

بشكل اكثر تحديدا، لكل p في A نستطيع أ يجاد عدد نسبي q في A بحيث $p < q$، ولكل p في B نستطيع إيجاد عدد نسبي q في B بحيث أن $q < p$.

لعمل هذا، نرفق لكل عدد نسبي $p > 0$ العدد

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p+2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \qquad (٣)$$

عندها

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p+2)^2} \qquad (٤)$$

إذا كانت p تقع في A عندها فإن $p^2 - 2 < 0$، (٣) تبين أن $q > p$، و (٤) تبين أن $q^2 < 2$. لذلك فإن q تقع في A.

إذا كانت p تقع في B عندها $p^2 - 2 > 0$، (٣) تبين أن $0 < q < p$، و(٤) تبين أن $q^2 > 2$. لذلك فإن q تقع في B.

١، ٢ ملاحظة: أن الغرض من الطرح والنقاش أعلاه هو لبيان أن نظام الأعداد النسبية يحتوي على بعض الفجوات، على الرغم من أنه يوجد هنالك بين كل عددين نسبيين عدد آخر: إذا كان $r < s$ عندها فإن $r < (r+s)/2 < s$. أن نظام الأعداد الحقيقية يملأ هذه الفجوات. الأمر الذي يعتبر السبب الأساسي للدور الجوهري الذي تلعبه هذه الأعداد في التحليل الرياضي.

لأجل توضيح بنية الأعداد الحقيقية، إضافة إلى بنيه الأعداد العقدية، سوف نبتدأ مناقشة موحدة حول المفاهيم العامة *للمجموعة المرتبة* *ordered set* *والحقل* *field*.

نقدم هنا بعض المصطلحات القياسية لنظرية المجموعات والتي ستستخدم على طول صفحات هذا الكتاب.

١ ، ٣ تعاريف: إذا كان A أي مجموعة (والذي قد تكون عناصره من الأعداد أو أي عناصر أخرى)، نكتب أن $x\in A$ لنبين أن x هي أحد أعضاء (أو عناصر) A.

إذا لم تكن x أحد أعضاءA، فإننا نكتب: $x\notin A$.

إن المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى *المجموعة الخالية* *empty set*. إذا كانت المجموعة تحتوي على عنصر واحد على الأقل، فإنها تسمى **مجموعة غير** *خالية* *nonempty*.

إذا كانت A وB مجموعتين، وكان كل عنصر من عناصر A عنصر في المجموعة B، فإننا نقول أن A هي مجموعة جزئية لـــB، ونكتب $A\subset B$، أو $B\supset A$. بالإضافة إلى ذلك إذا كان هناك عنصر في B لا ينتمي إلى A فإننا نقول أن A هي **مجموعة** *جزئية فعلية* *proper set* لـــ B. لاحظ أن $A\subset A$ لكل مجموعة A.

إذا كان $A\subset B$ و $B\subset A$، فإننا نكتب $A=B$. خلافا لذلك فإن $A\neq B$.

١ ، ٤ تعريف: على مدى الفصل الأول، فإن المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية سيرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$.

المجموعات المرتبة Ordered Sets

١ ، ٥ تعريف: لتكن S مجموعة. أن *الترتيب* *order* علىS هو علاقة، يرمز لها بـــ $<$ ، والتي تمتلك الخاصيتين الآتيتين:

(i) إذا كان $x\in S$ و $y\in S$ عندها فإن عبارة واحدة فقط من العبارات التالية

$$x<y\ ,\quad x=y\ ,\quad y<x$$

تكون صحيحة.

(ii) إذا كان $x,y,z\in S$ بحيث أن $x<y$ و $y<z$، فإن $x<z$ العبارة "$x<y$" وتقرأ "x اقل من y "أو "x اصغر من y " أو "x يسبق y ".

وكتقليد غالبا ما يكتب $y > x$ مكان $x < y$.

التأشير $x \le y$ يبين أن $x < y$ أو $x = y$، بدون أن تتحقق الحالتين في أن واحد.
وبعبارة أخرى، $x \le y$ هي نقيض لـ $x > y$.

١، ٦ تعريف: *المجموعة المرتبة* (*order set*) S هي المجموعة التي يعرف عليها الترتيب.

كمثال على ذلك، $\mathbf{Q}$ هي مجموعة مرتبة إذا كان $r < s$ معرفة بمعنى أن $s - r$ هي عدد نسبي موجب.

١، ٧ تعريف: نفرض أن S مجموعة مرتبة، وإن $E \subset S$. إذا كان يوجد $\beta \in S$ بحيث $x \le \beta$ لكل $x \in E$، ونحن نقول أن E هي ***مقيدة من الأعلى*** (***bounded above***)، ويدعى β قيد *علوي* ***upper bound*** لـ E.

القيد السفلي يعرف بنفس الطريقة (مع $\ge$ مكان $\le$).

١، ٨ تعريف: لنفترض أن S هي مجموعة مرتبة $E \subset S$، و E مقيدة من الأعلى. لنفترض أن هناك $\alpha \in S$ تمتلك الخصائص الآتية:

(**i**) α هي قيد علوي لـ E.

(**ii**) إذا كان $\gamma < \alpha$ عندها فإن γ ليست قيداً علويا لـ E.

عندها فإن α تسمى *القيد (المحدد) العلوي الأصغر* ***least upper bound*** لـ E [هناك على الأكثر α واحدة كهذه كما هو واضح من (II)] أو ***الأسمى (أصغر قيمة عظمى، أصغر نهاية عظمى)*** ***supremum*** لـ E، وتكتب بالشكل الآتي

$$\alpha = \sup E \ .$$

يتم تحديد *القيد السفلي الأعظم* ***greatest bound lower***، أو ***الأدنى (اعظم قيمة صغرى، اعظم نهاية صغرى)*** ***infimum*** للمجموعة E المقيدة من الأسفل بنفس الطريقة: أن العبارة

$$\alpha = \inf E$$

تعني أن α هي *القيد* السفلي للمجموعة E وإنه لا توجد هناك β بحيث $\alpha < \beta$ تكون قيد سفلي للمجموعة E.

١، ٩ أمثلة

(أ) اعتبر المجموعتين A و B المذكورتين في المثال ١، ١مجموعتين جزئيتين للمجوعة المرتبة $\mathbb{Q}$. أن المجموعة A *مقيدة من الأعلى*. وفي الحقيقة، فإن القيود العليا للمجموعة A هي بالضبط عناصر المجموعة B. وبما أن المجموعة B لا تحتوي على العنصر الأصغر، فإن المجموعة A لا *تمتلك قيداً علويا اصغر في* $\mathbb{Q}$ *A has no least upper bound in*.

وبنفس الطريقة، فإن B مقيدة من الأسفل:أن مجموعة جميع القيود السفلى لـــ B تكون المجموعة A ولكل $r \in \mathbb{Q}$ بحيث $r \leq 0$. بما أن المجموعة A لا تمتلك العنصر الأكبر، فإن المجموعة B لا تمتلك قيداً سفليا اعظم في $\mathbb{Q}$ **B has no greatest lower bound in**.

(ب) إذا كان $\alpha = \sup E$ موجودة، عندها فإن α قد تكون أو لا تكون عضوا في E. على سبيل المثال، لتكن E_1 المجموعة التي تضم جميع $r \in \mathbb{Q}$ حيث $r < 0$. ولتكن E_2 المجموعة التي تضم جميع $r \in \mathbb{Q}$ بحيث $r \leq 0$. عندها فإن

$$0, = \sup E_2 = \sup E_1$$

و $0 \notin E_1$، $0 \in E_2$.

(ج) لتكن المجموعة E تتألف من جميع الأعداد $\frac{1}{n}$، بحيث $(n = 1,2,3,\ldots)$ عندها فإن $\sup E = 1$ والتي تقع في E، و $\inf E = 0$، والتي لا تقع في E.

١، ١٠ تعريف: يقال للمجموعة المرتبة S بأنها تمتلك *خصوصية القيد العلوي الأصغر least - upper - bound property* إذا صح ما يلي:

إذا كان $E \subset S$، المجموعة E ليست مجموعة خاليه، و المجموعة E مقيدة من الأعلى، عندها فيوجد هنالك $\sup E$ في S. يبين المثال ١، ٩ (أ) بأن $\mathbb{Q}$ لا تمتلك خصوصية القيد الأعلى الأصغر. سوف نبين الآن أنه توجد هنالك علاقة وثيقة بين القيود السفلى الأعظم والقيود العليا الأصغر، وإن كل مجموعة مرتبة تمتلك خصوصية القيد العلوي الأصغر تمتلك بنفس الوقت خصوصية القيد الأسفل الأعظم.

١، ١١ مبرهنة: *لنفترض أن S هي مجموعة مرتبة تمتلك خصوصية القيد العلوي الأصغر، $B \subset S$، B ليست مجموعة خاليه، و B مقيدة من الأسفل. لتكن L المجموعة التي تضم جميع القيود السفلى لـــ B. عندها فإن*

$$\alpha = \sup L$$

توجد في S *و* $\alpha = \inf B$.

وعلى وجه الخصوص، $\inf B$ *موجودة في* S.

البرهان: بما أن B مقيدة من الأسفل، و L ليست مجموعة خاليه. وبما أن L تتألف بالضبط من $y \in S$ التي تحقق المتباينة $y \le x$ لجميع $x \in B$، فإننا نلاحظ أن *كل* $x \in B$ *هي قيد علوي لـ* L *is an upper bound of L*. لذلك فإن L هي مقيدة من الأعلى. أن افتراضاتنا حول S تدل ضمنا على أن L تمتلك قيمه عظمى **supremum** في S ؛ لنسميه α.

إذا كان $\gamma < \alpha$ عندها (لاحظ التعريف ١، ٨) فإن γ ليست قيداً علويا لـ L، لذلك فإن $\gamma \notin B$. أن هذا يؤدي إلى أن $\alpha \le x$ لكل $x \in B$. إذن $\alpha \in L$.

إذا كان $\alpha < \beta$، عندها فإن $\beta \notin L$، حيث أن α هي قيداً علويا لـ L.

بينا بأن $\alpha \in L$ ولكن $\beta \notin L$ إذا كان $\beta > \alpha$. بكلمة أخرى، α هي قيداً سفليا لـ B، ولكن β ليست كذلك إذا كان $\beta > \alpha$. أن هذا يعني أن $\alpha = \inf B$.

الحقول Fields

١، ١٢ تعريف الحقل *field* : هو المجموعة F بعمليتين، تسمى *الجمع addition* *والضرب multiplication*، والتي تحقق ما يسمى "بديهيات الحقل *field axioms*" **(A)**، **(M)** و **(D)** الآتية:

(A) بديهيات الجمع *addition for Axiom*

(A1) إذا كان $x \in F$ و $y \in F$، عندها فإن المجموع $x + y$ يقع في F.

(A2) الجمع الإبدالي **Addition is commutative**: $x + y = y + x$ لجميع $x, y \in F$.

(A3) الجمع التجميعي **Addition is associative**: $(x + y) + z = x + (y + z)$ لجميع $x, y, z \in F$.

(A4) تحتوي المجموعة F على العنصر 0 بحيث $0 + x = x$ لجميع $x \in F$.

(A5) لكل $x \in F$ هنالك عنصراً $-x \in F$ بحيث

$$x + (-x) = 0$$

(M) بديهيات الضرب Axioms for multiplication

(M1) إذا كان $x \in F$ و $y \in F$، عندها فإن حاصل ضربها xy يقع في F.

(M2) الضرب الإبدالي **Multiplication is commutative**: $xy = yx$ لجميع $x, y \in F$.

(M3) الضرب التجميعي **Multiplication is associative**: $(xy)z = x(yz)$ لجميع $x, y, z \in F$.

(M4) تحتوي المجموعة F على العنصر $1 \neq 0$ بحيث $1x = x$ لجميع $x \in F$.

(M5) إذا كان $x \in F$ و $x \neq 0$، عندها فإن هنالك عنصراً $\frac{1}{x} \in F$ بحيث أن $x \cdot (1/x) = 1$.

(D) القانون التوزيع The distributive law

$$x(y+z) = xy + xz$$

تتحقق المعادلة لجميع $x, y, z \in F$.

١، ١٣ ملاحظات

(أ) يصار عادة إلى كتابة (في أي حقل)

$$x - y, \frac{x}{y}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \ldots$$

بدلاً من

$$x + (-y), x \cdot \left(\frac{1}{y}\right), (x+y)+z, (xy)z, xx, xxx, x+x, x+x+x, \ldots .$$

(ب) من الواضح أن بديهيات الحقل تنطبق على **Q**، المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية، بالمفهوم المألوف لعمليتي الجمع والضرب. إذن المجموعة **Q** هي حقل.

(ج) على الرغم من أننا لا نهدف إلى دراسة المجالات (أو أية مركبات جبرية أخرى) بصورة منفصلة، إلا أنه من المهم البرهنة بأن بعض الخصائص المعروفة لـ **Q** هي نتائج بديهيات الحقل؛ وفي حالة قيامنا بذلك فإننا لا نحتاج إلى إجراءها مرة ثانية بالنسبة للأعداد الحقيقية وكذلك للأعداد المركبة.

١ ، ١٤ فرضية : *تؤدي بديهيات الجمع إلى العبارات الآتية.*

(أ) *إذا كان* $x+y=x+z$ *عندها فإن* $y=z$.

(ب) *إذا كان* $x+y=x$ *عندها فإن* $y=0$.

(ج) *إذا كان* $x+y=0$ *عندها فإن* $y=-x$.

(د) $-(-x)=x$.

العبارة (أ) تمثل قانون الحذف **cancellation law**. لاحظ بأن (ب)تؤكد على انفرادية العنصر الذي افترض وجوده في (A_4)، وبان (ج) تفعل نفس الشيء بالنسبة لــ (A_5).

البرهان: إذا كان $x+y=x+z$، من البديهيات (A)

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)$$
$$=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z.$$

إن هذا يبرهن (أ). عوض عن $z=0$ في (أ) لتحصل على (ب). عوض عن $z=-x$ في (أ) لتحصل على (ج).

بما أن $-x+x=0$، فإن (ج) (بوضع $-x$ بدل منx) تؤدي إلى (د).

١ ، ١٥ فرضية : *تؤدي بديهيات الضرب إلى العبارات الآتية.*

(أ) *إذا كان* $x\neq 0$ *و* $xy=xz$ *عندها فإن* $y=z$.

(ب) *إذا كان* $x\neq 0$ *و* $xy=x$ *عندها فإن* $y=1$.

(ج) *إذا كان* $x\neq 0$ و $xy=1$ عندها فإن $y=1/x$.

(د) *إذا كان* $x\neq 0$ *عندها فإن* $1/(1/x)=x$.

البرهان: مشابه لبرهان الفرضية ١، ١٤، لذلك سوف لا نذكره هنا.

١ ، ١٦ فرضية : *تنتج عن بديهيات الحقل العبارات الآتية، لجميع* $x,y,z\in F$.

(أ) $0x=0$.

(ب) *إذا كان* $x\neq 0$ *و* $y\neq 0$ *عندها فإن* $xy\neq 0$.

(ج) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$.

(د) $(-x)(-y)=xy$.

البرهان:

$0x+0x=(0+0)x=0x$. نستنتج من ١، ١٤(ب) بأن $0x=0$، وان (أ) صحيحة.

الخطوة الآتية، لنفترض أن $x\neq 0, y\neq 0$، ولكن $xy=0$. من (أ) نستنتج أن

$$1=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0=0,$$

وهذا تناقض. إذن (ب) صحيحة.

المعادلة الأولى في (ج) تأتي من

$$(-x)y+xy=(-x+x)y=0y=0,$$

بالترابط مع ١، ١٤(ج) ؛ تتم برهنة النصف الآخر من (ج) بنفس الطريقة.

أخيراً،

$$(-x)(-y)=-[x(-y)]=-[-(xy)]=xy$$

بواسطة (ج) و ١، ١٤ (د).

١، ١٧ تعريف: *الحقل المرتب ordered field* هو *الحقل F field* والذي هو بنفس الوقت *مجموعة مرتبة ordered set*، بحيث

(i) $x+y<x+z$ إذا كان $x,y,z\in F$ و $y<z$،

(ii) $xy>0$ إذا كان $x\in F$، $y\in F$، $x>0$ و $y>0$.

إذا كان $x>0$، فإننا نسمي x *موجباً positive*؛ إذا كان $x<0$، فإن x *سالب negative*.

على سبيل المثال، **Q** هي حقل مرتب.

جميع القواعد المعروفة في التعامل مع المتباينات تنطبق على كل حقل مرتب: الضرب في كميات موجبة [سالبة] تحافظ على [تعكس] المتباينات، المربع لا يمكن أن يكون سالباً، الخ...

تبين الفرضية الآتية بعض هذه القواعد.

١، ١٨ فرضية: *العبارات الآتية صحيحة لكل حقل مرتب.*

(أ) *إذا كان* $x>0$ *فإن* $-x<0$*، والعكس صحيح.*

(ب) إذا كان $x > 0$ و $y < z$ فإن $xy < xz$.

(ج) إذا كان $x < 0$ و $y < z$ فإن $xy > xz$.

(د) إذا كان $x \neq 0$ فإن $x^2 > 0$. وعلى وجه الخصوص، $1 > 0$.

(هـ) إذا كان $0 < x < y$ فإن $0 < 1/y < 1/x$.

البرهان:

(أ) إذا كان $x > 0$ فإن $0 = -x + x > -x + 0$، لذلك $-x < 0$. إذا أن $x < 0$ فإن $0 = -x + x < -x + 0$، لذلك فإن $-x > 0$. وهذا يبرهن (أ).

(ب) بما أن $z > y$، فإن $z - y > y - y = 0$، إذن $x(z - y) > 0$، لذلك فإن

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy \ .$$

(ج) استنادا إلى (أ)، (ب)، والفرضية ١، ١٦ (ج)،

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0,$$

لذلك فإن $x(z - y) < 0$، إذن $xz < xy$.

(د) إذا كان $x > 0$، استناداً إلى (ii) من التعريف ١، ١٧فإن $x^2 > 0$. إذا كان $x < 0$، فإن $-x > 0$، إذن $(-x)^2 > 0$. ولكن $x^2 = (-x)^2$، استناداً إلى الفرضية ١، ١٦ (د). بما أن $1 = 1^2, 1 > 0$.

(هـ) إذا كان $y > 0$ و $v \leq 0$، فإن $yv \leq 0$. ولكن $y.(1/y) = 1 > 0$. إذن $1/y > 0$. وبنفس الطريقة، فإن $1/x > 0$. إذا ضربنا طرفي المتباينة $x < y$ بالمقدار الموجب $(1/x)(1/y)$، فإننا نحصل على أن $1/y < 1/x$.

الحقل الحقيقي The Real Field

ندرج هنا مبرهنة التواجد ***existence theorem*** التي هي جوهر هذا الفصل.

١، ١٩ مبرهنة: *هنالك حقل مرتب* **R** *يمتلك خصوصية القيد العلوي الأصغر.*

إضافة إلى ذلك، فإن **R** *يحتوي على* **Q** *كمجموعة جزئية.*

إن العبارة الثانية تعني أن $Q \subset R$ وان عمليات الجمع والضرب في R، عندما تطبق على عناصر Q، فإنها تتطابق مع العمليات الاعتيادية على الأعداد النسبية ؛وبنفس الوقت، فإن الأعداد النسبية الموجبة هي عناصر موجبة في R.

تسمى عناصر R *الأعداد الحقيقية* ***real numbers***.

أن برهان المبرهنة ١، ١٩ هو برهان طويل بعض الشيء وشائك ولذلك فإننا سنقدمه في ملحق للفصل الأول. وفي الحقيقة فإن البرهان يؤلف (يكون) **R construct** من **Q**.

من الممكن استخلاص المبرهنة الآتية من هذا البناء بجهد إضافي قليل. ولكننا، نفضل أن نشتقه من المبرهنة ١، ١٩ حيث أن ذلك يقدم إيضاحا جيداً للتطبيقات الممكنة لخاصية القيد العلوي الأصغر.

١، ٢٠ مبرهنة:

(أ) *إذا كان* $x \in$ R، $y \in$ R، و $x > 0$، *فيوجد هنالك عدد صحيح موجب* n *بحيث*

$$nx > y.$$

(ب) *إذا كان* $x \in$ R، $y \in$ R، و $x < y$، *فيوجد هنالك* $p \in$ **Q** *بحيث* $x < p < y$.

غالباً ما يطلق على الفرع (أ) *الخاصية الارخميديسيه لـ* ***archimedean property of*** **R** . ويمكن القول من الفرع (ب) بأن **Q** *كثيفة* (مركزة) ***dense*** في **R**: بين كل عددين حقيقين هناك عدد نسبي.

البرهان:

(أ) لتكن A المجموعة التي تضم جميع العناصر nx، حيث أن قيم n الأعداد الصحيحة الموجبة.

إذا كانت (أ) خاطئة، فإن y ستكون القيد العلوي لـ A. لكن A تمتلك قيداً علوياً أصغر في **R**. ضع $\alpha = \sup A$. بما أن $x > 0$، $\alpha - x < \alpha$، و $\alpha - x$ ليست قيداً علوياً في A. إذن $\alpha - x < mx$ لبعض الأعداد الصحيحة الموجبة مثل m. ولكن عندها ستكون $\alpha < (m+1)x \in A$، وهذا مستحيل، لأن α هي قيدا علوياً في A.

(ب) بما أن $x < y$، فإن $y - x > 0$، وتقدم (أ) عدداً صحيحاً موجباً n بحيث

$$n(y-x) > 1 .$$

نطبق (أ) مرة ثانية، للحصول على أعدادا صحيحة موجبة مثل m_1 و m_2 بحيث $m_1 > nx$، $m_2 > -nx$. عندها

$$-m_2 < nx < m_1 .$$

إذن يوجد هنالك عدد صحيح m (بحيث $-m_2 \le m \le m_1$) بحيث

$$m-1 \le nx < m \ .$$

إذاً ربطنا هاتين المتباينتين، فإننا نحصل على

$$nx < m \le 1+nx < ny.$$

بما أن $n > 0$، فإن ذلك يؤدي إلى

$$x < \frac{m}{n} < y \ .$$

أن هذا يبرهن (ب)، عندما يكون $p = m/n$.

سوف نبرهن الآن وجود existence e الجذور لدرجة نون للأعداد الحقيقية الموجبة. سوف يبين هذا البرهان الصعوبة التي تطرقنا إليها في المقدمة (ألــ لا نسبيه لــ $\sqrt{2}$) في R.

١، ٢١ مبرهنة: *لكل عدد حقيقي $x > 0$ ولكل عدد صحيح $n > 0$ هنالك عدد حقيقي واحد وواحد فقط y بحيث $y^n = x$.*

يكتب هذا العدد y بالشكل التالي $\sqrt[n]{x}$ أو $x^{1/n}$.

البرهان: أن مسألة وجود عدد واحد y كهذا على الأكثر هي مسألة واضحة، بما أن $0 < y_1 < y_2$ تدل ضمناً على أن $y_1^n < y_2^n$.

لتكن E المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية الموجبة t بحيث $t^n < x$. إذا كانت $t = x/(1+x)$ فإن $0 < t < 1$. إذن $t^n < t < x$. لذلك فإن $t \in E$، و E ليست مجموعة فارغة (خالية).

إذا كانت $t > 1+x$ فإن $t^n > t > x$، فإن $t \notin E$. ولهذا فإن $1+x$ هو قيد علوي لــ E. إذن المبرهنة ١، ١٩ تدل ضمناً على وجود $y = \sup E$.

ولبرهنة أن $y^n = x$ سوف نبين بأن كلاً من المتباينتين $y^n < x$ و $y^n > x$ تؤدي إلى تناقض.

تنتج المتطابقة الآتية

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1})$$

المتباينة

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

عندما تكون $0 < a < b$.

لنفترض أن $y^n < x$. نختار h بحيث $0 < h < 1$ و

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}} .$$

نضع $a = y$، $b = y + h$. عندها

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

لذلك فإن $(y+h)^n < x$، و $y + h \in E$. بما أن $y + h > y$، فإن هذا يتناقض كون y قيداً علوياً في E.

لنفترض أن $y^n > x$. ضع

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} .$$

ثم $0 < k < y$. إذا كانت $t \geq y - k$، فإننا نستنتج أن

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x .$$

لذلك فإن $t^n > x$، و $t \notin E$. وهذا يؤدي إلى أن $y - k$ هو القيد العلوي لـــ E.

ولكن $y - k < y$، الآمر الذي يناقض كون y القيد العلوي الأصغر لـــ E.

إذن $y^n = x$، وان البرهان انتهى عند هذا الحد.

نتيجة: *إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين و n عدد صحيح موجب، فإن*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n} .$$

البرهان: $\alpha = a^{1/n}$، $\beta = b^{1/n}$. عندها فإن

$$ab = \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n,$$

بما أن عملية الضرب هي عمليه تبادليه. [البديهية (M_2) في التعريف ١، ١٢].

أن تأكيد الوحدانية في المبرهنة ١، ٢١تبين تبعاً لذلك بأن

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n} .$$

١، ٢٢ الأعداد العشرية Decimals : ننهي هذا القسم ببيان العلاقة بين الأعداد الحقيقية والأعداد العشرية.

لتكن $x > 0$ عدداً حقيقياً. لتكن n_0 اكبر عدد صحيح بحيث $n_0 \leq x$. (لاحظ بأن وجود n_0 يعتمد على الخاصية الارخميدسيه لـــ R). بعد أن اخترنا $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$، لتكن

n_k العدد الصحيح الأكبر بحيث أن

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

لتكن E المجموعة التي تضم الأعداد الآتية

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \cdot \qquad (٥)$$

عندها فإن $x = \sup E$. أن المفكوك العشري لـ x هو

$$n_0 \cdot n_1 n_2 n_3 \cdots. \qquad (٦)$$

وبالعكس، لكل عدد عشري لانهائي (٦) فإن المجموعة E التي تضم الأعداد (٥) هي مقيدة من الأعلى، و (٦) هي المفكوك العشري لـ $\sup E$.

وبما إننا سوف لن نستخدم الأرقام العشرية، سوف لن ندخل هنا بتفاصيل مستفيضة لها.

النظام الموسع للأعداد الحقيقية

The Extended Real Number System

١، ٢٣ تعريف : يتألف النظام الموسع للأعداد الحقيقية من الحقل الحقيقي **R** والرمز $+\infty$ و $-\infty$. بعد المحافظة على الترتيب الأساسي لـ **R**، و نعرف

$$-\infty < x < +\infty$$

لكل x **R**.

من الواضح الآن بأن $+\infty$ هي القيد العلوي لكل مجموعة جزئية في النظام الموسع للأعداد الحقيقية، وإن كل مجموعة جزئية غير خاليه تمتلك قيداً علوياً أصغر. على سبيل المثال، إذا كانت E مجموعة غير خاليه من الأعداد الحقيقية والتي هي غير مقيدة من الأعلى في **R**، عندها فإن $\sup E = +\infty$ في النظام الموسع للأعداد الحقيقية.

تنطبق نفس هذه الملاحظات بالضبط على القيد السفلي.

أن النظام الموسع للأعداد الحقيقية لا يشكل حقلاً، لكن من المألوف تقديم هذه المصطلحات:

(أ) إذا كانت x عدداً حقيقياً فإن

$$x - \infty = -\infty, \ \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \ x + \infty = +\infty.$$

(ب) إذا كانت $x > 0$ فإن $x \cdot (-\infty) = -\infty$, $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

(ج) إذا كانت $x < 0$ فإن $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

إذا كانت هنالك رغبه للتميز الدقيق بين الأعداد الحقيقية من جهة والرمزين $+\infty$ و $-\infty$ من جهة أخرى، فإن الأعداد الحقيقية تسمى "محدودة" *finite*.

الحقل المركب The Complex Field

١، ٢٤ تعريف: *العدد العقدي (complex number)* هو زوج مرتب **order pair** (a,b) من الأعداد الحقيقية. أن كلمة "مرتبة" **"Ordered"** تعني بأن (a,b) و(b,a) هما زوجان متميزان إذا كانت $a \neq b$.

ليكن $x = (a,b)$ ، $y = (c,d)$ عددين عقدين. أننا نكتب $x = y$ إذا وإذا فقط كان $a = c$ و $b = d$. (لاحظ بأن هذا التعريف ليس قليل الأهمية بمعنى الكلمة ؛فكر بمعادلة من الأعداد النسبية، مقدمه على شكل خارج قسمه الأعداد الصحيحة). نقوم بتعريف

$$x + y = (a+c, b+d),$$
$$xy = (ac - ba, ad + bc) \ .$$

١، ٢٥ مبرهنة: *تحول هذه التعاريف للجمع والضرب المجموعة المكونة من جميع الأعداد العقدية إلى الحقل، بأخذ* $(0,0)$ و $(1,0)$، بدلاً من **0** و **1**.

البرهان: ببساطة نقوم بإثبات بديهيات الحقل، كما مدرجه في التعريف ١، ١٢. (بالطبع، نستخدم بنية الحقل لـــ **R**).

لتكن $x = (a,b), y = (c,d), z = (e,f)$.

(A1) واضحة.

(A2) $x + y = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = y + x$.

(A3) $$\begin{aligned}(x+y)+z &= (a+c, b+d) + (e,f) \\ &= (a+c+e, b+d+f) \\ &= (a,b) + (c+e, d+f) \\ &= x + (y+z) \ .\end{aligned}$$

(A4) $x + 0 = (a,b) + (0,0) = (a,b) = x$.

(A5) ضع $-x=(-a,-b)$. عندها فإن $x+(-x)=(0,0)=0$.

(M1) واضحة.

(M2) $xy=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=yx$.

(M3)
$$\begin{aligned}(xy)z &= (ac-bd,ad+bc)(e,f)\\ &= (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\\ &= (a,b)(ce-df,cf+de)=x(yz)\ .\end{aligned}$$

(M4) $1x=(1,0)(a,b)=(a,b)=x$.

(M5) إذا كان $x\neq 0$ فإن $(a,b)\neq(0,0)$، الأمر الذي يعني بأن هناك على الأقل عدداً واحداً صحيحاً a,b يختلف عن الـ 0، إذن $a^2+b^2>0$، استنادا إلى الفرضية ١، ١٨ (د)، ونستطيع أن نعرف

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

$$x.\frac{1}{x}=(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1\ .$$

(D)
$$\begin{aligned}x(y+z) &= (a,b)(c+e,d+f)\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\\ &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\ &= xy+xz\ .\end{aligned}$$

١، ٢٦ مبرهنة: *لكل عددين حقيقين a و b*

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$$

وكذلك

$$(a,0)(b,0)=(ab,0).$$

البرهان عادي جداً.

تبين المبرهنة ١، ٢٦بان الأعداد العقدية التي على شكل $(a,0)$ تمتلك نفس الخصائص الحسابية لمثيلاتها من الأعداد الحقيقية a. لذلك فإن بإمكاننا أن نمثل $(a,0)$ بـ a. أن هذا التمثل يقدم لنا الحقل الحقيقي كحقل جزئي من الحقل المركب.

قد يلاحظ القارئ بأننا قد حددنا الأعداد العقدية بدون أي إشارة إلى الجذر التربيعي الغامض لـ ‎-١. نبين الآن بأن الرمز (a,b) مكافئ للرمز الأكثر ألفه $a+bi$.

١، ٢٧ تعريف: $i = (0,1)$.

١، ٢٨ مبرهنة: $i^2 = -1$.

البرهان: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$.

١، ٢٩ مبرهنة: *إذا كان* a *و* b *عددين حقيقيين فإن* $(a,b) = a + bi$.

البرهان:

$$a + bi = (a,0) + (b,0)(0,1)$$
$$= (a,0) + (0,b) = (a,b) .$$

١، ٣٠ تعريف: إذا كان a و b عددين حقيقيين وكان $z = a + bi$، فإن العدد العقدي $\bar{z} = a - bi$ يسمى العدد *"المرافق"* لـ z *conjugate of z*. العددان a و b *هما الجزء الحقيقي* لـ z *of part real z* *والجزء الخيالي* لـ z *imaginary part of z*، على التوالي.

بين فتره وأُخرى سنقوم بكتابة

$$a = \text{Re}(z), \qquad b = \text{Im}(z).$$

١، ٣١ مبرهنة: *إذا كان* z *و* w *عددين عقديين فإن*

(أ) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$،

(ب) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$،

(ج) $z + \bar{z} = 2\,\text{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z)$،

(د) $z\bar{z}$ *عدد حقيقي و موجب (باستثناء عندما تكون* $z = 0$ *).*

البرهان: أن برهنة (أ)، (ب)، (ج) عاديه جداً. لبرهنة (د) أُكتب أن $z = a + bi$، ولاحظ بأن $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

١، ٣٢ تعريف: إذا كان z عدداً عقدياً، فإن *قيمته المطلقة* ***absolute value*** $|z|$ هي الجذر التربيعي الغير سالب لـ $z\bar{z}$، أي بكلمة أُخرى، $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.

إن وجود (ووحدانية) $|z|$ تتأتى من المبرهنة ١، ٢١ والجزء (د) من المبرهنة ١، ٣١.

لاحظ بأنه عندما يكون x عدداً حقيقياً، فإن $\bar{x} = x$، إذن $|x| = \sqrt{x^2}$. لذلك فإن $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$، و $|x| = -x$ إذا كان $x < 0$.

١، ٣٣ مبرهنة: *لتكن z و w عددين عقديين، فإن*

(أ) $|z| > 0$ ما لم يكن $z = 0$، $|0| = 0$،

(ب) $|\bar{z}| = |z|$،

(ج) $|zw| = |z||w|$،

(د) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$،

(هـ) $|z + w| \le |z| + |w|$.

البرهان: (أ) و (ب) عادية جداً. ضع $z = a + bi$، $w = c + di$، حيث أن a,b,c,d أعداداً حقيقة عندها فإن

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2$$

أو

$|zw|^2 = (|z||w|)^2$. أما بالنسبة لـ (ج) فإنها تتأتى من تأكيد الوحدانية للمبرهنة١، ٢١.

لبرهنة (د)، لاحظ بأن $a^2 \le a^2 + b^2$، إذن

$$|a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

لبرهنة (هـ)، لاحظ بأن $\bar{z}w$ هو المرافق لـ $z\bar{w}$، لذلك فإن $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$.

إذن

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}\\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2\\ &\le |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2\\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\ .\end{aligned}$$

الآن (هـ) تتحقق بعد أخذ الجذور التربيعية.

١، ٣٤ ترميز : إذا كان $x_1,\dots,x_n$ أعداداً عُقديه، فإننا نكتب

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\ .$$

نختتم هذا البند بمتباينة مهمة، غالباً ما تعرف *بمتباينة شوارز* ***Schwarz inequality***.

١، ٣٥ مبرهنة: *إذا كان $a_1,\dots,a_n$ و $b_1,\dots,b_n$ أعداداً عُقديه، فإن*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^2 \sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right|^2 .$$

برهان: ضع $A=\sum|a_j|^2$ ، $B=\sum|b_j|^2$ ، $C=\sum a_j\bar{b}_j$ (في جميع المجاميع لهذا البرهان j تمر خلال القيم $1,\ldots,n$). إذا كانت $B=0$ ، فإن $b_1=\cdots=b_n=0$ ، ويكون الاستنتاج عديم القيمة. لذلك نفترض أن $B>0$. استناداً للمبرهنة ١، ٣١ فإن

$$\begin{aligned}\sum\left|Ba_j - Cb_j\right|^2 &= \sum(Ba_j - Cb_j)(B\bar{a}_j - \bar{C}\bar{b}_j)\\ &= B^2\sum\left|a_j\right|^2 - B\bar{C}\sum a_j\bar{b}_j - BC\sum\bar{a}_j b_j + |C|^2\sum\left|b_j\right|^2\\ &= B^2A - B|C|^2\\ &= B(AB-|C|^2).\end{aligned}$$

بما أن كل حد في المجموع الأول ليس سالباً، فإننا نلاحظ بأن

$$B(AB-|C|^2)\ge 0 .$$

بما أن $B>0$ ، فإن ذلك يؤدي إلى أن $AB-|C|^2\ge 0$. وهذه هي المتباينة المطلوبة.

الفضاءآت الاقليدية Euclidean Spaces

١، ٣٦ تعاريف: لكل عدد صحيح موجب k، لتكن R^k المجموعة التي تضم جميع قوى k مرتبة **k-tuples**

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_k) ,$$

حيث أن $x_1,\ldots,x_k$ أعداداً حقيقية، تدعى *الإحداثيات* لـ $\mathbf{x}$ *coordinates of* $\mathbf{x}$.

تسمى عناصر R^k *النقاط points*، أو *المتجهات vectors*، على الخصوص عندما تكون $k>1$. سوف نشير إلى المتجهات بواسطة الحروف السميكة. إذا كانت $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_k)$ و α عدداً حقيقياً، ضع

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ldots,x_k+y_k),$$
$$\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_k)$$

بحيث $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in\mathsf{R}^k$ و $\alpha\mathbf{x}\in\mathsf{R}^k$. أن هذا يحدد عملية جمع المتجهات بالإضافة إلى عملية ضرب المتجهات بعدد حقيقي (غير متجه). أن هاتين العمليتين تحققان القوانين التبادلية

والتجميعية، والتوزيعية (البرهان بسيط جداً، على ضوء تشابهها مع القوانين المتعلقة بالأعداد الحقيقية). وتجعل من R^k *فضاء متجه على الحقل الحقيقي* ***a vector space over the real field***. أن العنصر الصفري لـ R^k (يدعى أحيانا ***الأصل origin*** أو *المتجهة الخامد* ***null vector***) هو النقطة 0، والتي جميع إحداثياتها 0.

نقوم أيضا بتحديد ما يسمى "*حاصل الضرب الداخلي*" ***"inner product"*** (أو *حاصل الضرب الغير الموجهة* أو *الجداء الداخلي*) لـ **x & y** ***scalar product of*** بواسطة

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

والمعيار لـ **x** ***of norm*** بواسطة

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2} = (\sum_{1}^{k} x_i^2)^{1/2} \quad .$$

أن البناء الذي حدد الآن (الفضاء المتجهة R^k بحاصل الضرب الداخلي والمعيار أعلاه) يسمى *الفضاء*– *k* الاقليدي ***(euclidean k - space)*** .

١ ، ٣٧ مبرهنة: *افرض أن* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathsf{R}^k$ *و* α *عدد حقيقي. فإن*

(أ) $|\mathbf{x}| \ge 0$ ؛

(ب) $|\mathbf{x}| = 0$ *إذا وإذا فقط كان* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ؛

(ج) $|\alpha\,\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$؛

(د) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$؛

(هـ) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$؛

(و) $|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \le |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + |\mathbf{y}-\mathbf{z}|$.

البرهان: (أ)، (ب)، و(ج) واضحة، (د) هي نتيجة مباشرة لمتباينة شو أرز. من (د) فإن

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})\\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\\ &\le |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2\\ &= (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2,\end{aligned}$$

وبذلك فإن (هـ) قد برهنت. أخيراً، فإن (و) تستنتج من (هـ) إذا استبدلنا x بـ $x - y$ و y بـ $y - z$.

١، ٣٨ ملاحظات: المبرهنة١، ٣٧ (أ)، (ب)، و (و) سوف تسمح لنا (لاحظ الفصل الثاني) باعتبار R^k فضاءاً مترياً.

غالباً ما تسمى R^1 (المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية) *الخط line*، أو *الخط الحقيقي real line*. وبنفس الطريقة، فإن R^2 تسمى *المستوي plane*، أو *المستوي المركب complex plane* (قارن التعريف١، ٢٤ و١، ٣٦). في هاتين الحالتين يكون المعيار مجرد قيمة مطلقة للعدد الحقيقي أو العدد العقدي المتعلق به.

ملحق Appendix

سوف تتم برهنة المبرهنة ١، ١٩في هذا الملحق عن طريق بناء Rمن Q. سوف نقسم هذا البناء إلى عدة خطوات.

الخطوة ١: إن عناصر R ستكون مجاميع جزئية محددة من K وتسمى *قواطع cuts*.
واستناداً إلى التعريف، فإن القاطع، هو أية مجموعة $\alpha \subset Q$ تمتلك الخصائص الثلاثة الآتية.

(I) α ليست فارغة، $\alpha \neq Q$.

(II) إذا كانت $p \in \alpha$، $q \in Q$، و $q < p$، فإن $q \in \alpha$.

(III) إذا كانت $p \in \alpha$، فإن $p < r$ لبعض $r \in \alpha$.

الحروف $p, q, r, \ldots$ سوف تشير دائماً إلى الأعداد النسبية، و $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ سوف تشير إلى القواطع.

لاحظ بأن (III) تشير ببساطه إلى أن α لا تمتلك عنصراً اكبراً، بينما (II) تشير ضمناً إلى حقيقيتين سوف تستخدم بحريه تامة:

إذا كانت $p \in \alpha$ و $q \notin \alpha$ فإن $p < q$.

إذا كانت $r \notin \alpha$ و $r < s$ فإن $s \notin \alpha$.

الخطوة ٢: حدد " $\alpha < \beta$ " لتعني أن: α هي مجموعة جزئية فعلية لـ β.

لنتحقق من أن هذا يستجيب لمتطلبات التعريف ١، ٥.

إذا كانت $\alpha < \beta$ و $\gamma > \beta$ فمن الواضح أن $\gamma > \alpha$. (المجموعة الجزئية الفعلية لمجموعة جزئية فعلية هي مجموعة جزئية فعلية). وكذلك فانه من الواضح أيضا بأن علاقة واحدة على الأكثر من العلاقات الثلاثة

$$\alpha < \beta, \alpha = \beta, \beta < \alpha$$

تتحقق لأي زوج α, β. ولكي نبين انه يتحقق على الأقل علاقة واحدة، نفترض أن العلاقتين الأوليتين لا تتحقق. عندها فإن α ليست مجموعة جزئية لـــ β. إذن يوجد هنالك $p \in \alpha$ مع $p \notin \beta$. إذا كانت $q \in \beta$، فإن ذلك يعني بأن $q < p$ (بما أن $p \notin \beta$)، إذن $q \in \alpha$، استنادا لـــ (III). لذلك فإن $\beta \subset \alpha$. بما أن $\beta \neq \alpha$، فإننا نستنتج بأن: $\beta < \alpha$.

لذلك فإن $\mathbf{R}$ هي الآن مجموعة مرتبة.

الخطوة ٣: *تمتلك المجموعة المرتبة* $\mathbf{R}$ *خاصية القيد العلوي الأصغر* ***least -upper - bound property***.

لبرهنة ذلك، لتكن A مجموعة جزئية غير خالية لـــ $\mathbf{R}$، ونفترض بأن $\beta \in \mathbf{R}$ هي القيد العلوي لـــA. نعين γ لتكون الاتحاد لجميع $\alpha \in A$. بعبارة أخرى، فإن $p \in \gamma$ إذا وإذا فقط كانت $p \in \alpha$ لبعض $\alpha \in A$. سوف نبرهن على أن $\gamma \in \mathbf{R}$ وكذلك $\gamma = \sup A$.

بما أن A مجموعة غير خالية، يوجد هنالك $\alpha_0 \in A$. هذه الـــ α_0 غير خالية. بما أن $\alpha_0 \subset \gamma$، γ غير خالية. الآن، $\gamma \subset \beta$ (بما أن $\alpha \subset \beta$ لكل $\alpha \in A$)، وذلك فإن $\gamma \neq \mathbf{Q}$.

إذن γ تحقق الخاصية (I). لبرهنة (II) و(III)، أختر $p \in \gamma$. ثم $p \in \alpha_1$ لبعض $\alpha_1 \in A$.

إذا كانت $q < p$ فإن $q \in \alpha_1$، ثم $q \in \gamma$ ؛وهذا يبرهن (II). إذا تم اختيار $r \in \alpha_1$ بحيث $r > p$، يتبين لنا بأن $r \in \gamma$ (حيث أن $\alpha_1 \subset \gamma$)، وذلك فإن γ تحقق (III).

إذن $\gamma \in \mathbf{R}$.

من الواضح أن $\alpha \leq \gamma$ لكل $\alpha \in A$.

نفترض أن $\delta < \gamma$. إذن يوجد هنالك $s \in \gamma$ وبنفس الوقت $s \notin \delta$. بما أن $s \in \gamma$، $s \in \alpha$ لبعض $\alpha \in A$. إذن $\delta < \alpha$، و δ ليست قيداً علوياً لـــ A.

أن هذا يعطي النتيجة المطلوبة وهي أن: $\gamma = \sup A$.

الخطوة ٤: إذا كانت $\mathbf{R}$ α و $\beta \in \mathbf{R}$ فإننا نعين $\alpha + \beta$ لتكون المجموعة التي تضم المجاميع $r + s$، حيث $r \in \alpha$ و $s \in \beta$.

نعين 0^* لتكون المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية السالبة. من الواضح أن 0^* هي قاطع. *نستنتج من ذلك بأن بديهيات الجمع* (انظر التعريف ١، ١٢) *تنطبق في* **R**، حيث *تلعب* 0^* *دور الـ* 0.

(A1) علينا أن نبين أن $\alpha+\beta$ هي قاطع. من الواضح أن $\alpha+\beta$ هي مجموعة جزئية غير خالية لـ **Q**. نأخذ $r' \notin \alpha$, $s' \notin \beta$. عندها فإن $r'+s' > r+s$ لجميع الاختيارات لـ $r \in \alpha$، $s \in \beta$. لذلك فإن $r'+s' \notin \alpha+\beta$. يستدل من ذلك بأن $\alpha+\beta$ تمتلك الخاصية (I).

نختار $p \in \alpha+\beta$. عندها فإن $p=r+s$، حيث $r \in \alpha$، $s \in \beta$. إذا كانت $q<p$، فإن $q-s<r$، لذلك فإن $q-s \in \alpha$، و $q=(q-s)+s \in \alpha+\beta$. إذن (II) تتحقق. نختار $t \in \alpha$ بحيث $t>r$. عندها فإن $p<t+s$ و $t+s \in \alpha+\beta$. إذن (III) تتحقق.

(A2) $\alpha+\beta$ هي المجموعة التي تضم جميع $r+s$، بحيث $r \in \alpha$، $s \in \beta$. استناداً إلى نفس التعريف، فإن $\beta+\alpha$ هي المجموعة التي تضم جميع $s+r$. بما أن $r+s=s+r$ لجميع $r \in \mathbf{Q}$، $s \in \mathbf{Q}$، فإن $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

(A3) كما جاء ا علاه، يستدل ذلك من قانون التجميع في **Q** .

(A4) إذا كانت $r \in \alpha$ و $s \in 0^*$، فإن $r+s<r$، إذن $r+s \in \alpha$. لذلك فإن $\alpha+0^* \subset \alpha$. لكي نحصل على التضمين المعاكس، نختار $p \in \alpha$، ونختار أيضا $r \in \alpha$، $r>p$. إذن $p-r \in 0^*$، و $p=r+(p-r) \in \alpha+0^*$ إذن $\alpha \subset \alpha+0^*$. نستنتج من هذا بأن $\alpha+0^*=\alpha$.

(A5) حدد α **R**. لتكن β المجموعة التي تضم جميع الـ p التي تمتلك الخاصية الآتية:

يوجد هنالك $r>0$ *بحيث* $-p-r \notin \alpha$.

بعبارة أخرى، بعض الأعداد النسبية الأصغر من $-p$ لا تدخل ضمن α.

نبين أن $\beta \in$ **R** *وان* $\alpha+\beta=0^*$.

إذا كانت $s \notin \alpha$ و$p=-s-1$، فإن $-p-1 \notin \alpha$، إذن $p \in \beta$. لهذا فإن β ليست خالية. إذا كانت $q \in \alpha$، فإن $-q \notin \beta$. لذلك فإن **Q** $\neq \beta$. إذن β تحقق (I).

نقوم باختيار $p \in \beta$، و $r>0$ بحيث $-p-r \notin \alpha$. إذا كانت $q<p$، فإن

$-q-r>-p-r$، إذن $-q-r\notin\alpha$. ولهذا فإن $q\in\beta$ و(II) تتحقق. ضع $t=p+(r/2)$. إذن $t>p$، و $-t-(r/2)=-p-r\notin\alpha$، لذلك فإن $t\in\beta$. إذن β تحقق (III).

برهنا على أن $\beta\in\mathbf{R}$.

إذا كانت $r\in\alpha$ و $s\in\beta$، فإن $-s\notin\alpha$، إذن $r<-s$، $r+s<0$. لذلك فإن $\alpha+\beta\subset 0^*$.

للبرهنة على التضمين المعاكس، نختار $v\in 0^*$، ضع $w=-v/2$. إذن $w>0$، ويوجد هنالك عدد صحيح n بحيث $nw\in\alpha$ ولكن $(n+1)w\notin\alpha$. (لاحظ بأن هذا يعتمد على امتلاك $\mathbf{Q}$ للخاصية الارخميديسيه!). ضع $p=-(n+2)w$. إذن $p\in\beta$، بما أن $-p-w\notin\alpha$، و. $v=nw+p\in\alpha+\beta$

لذلك فإن $0^*\subset\alpha+\beta$.

نستنتج بأن $\alpha+\beta=0^*$.

بالطبع فإن هذا الـ β سوف يرمز له بـ $-\alpha$.

الخطوة ٥ : بعد أن برهنا بأن الجمع المحدد في الخطوة ٤ يحقق البديهيات (A) للتعريف ١، ١٢، نستنتج من ذلك بأن الفرضية ١، ١٤ تنطبق على $\mathbf{R}$، وباستطاعتنا برهنة واحدة من متطلبات التعريف ١، ١٧:

إذا كانت $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ و $\beta<\gamma$، *فإن* $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$ ؛

في الحقيقة، من الواضح من تعريف الـ + في $\mathbf{R}$ بأن $\alpha+\beta\subset\alpha+\gamma$، إذا كان لدينا $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$، فإن قانون الحذف (الفرضية ١، ١٤) سوف يدل ضمناً على أن $\beta=\gamma$.

ونحصل أيضاً على أن $\alpha>0^*$ إذا وإذا فقط كان $-\alpha<0^*$.

الخطوة ٦ : أن عملية الضرب أعقد قليلاً من عملية الجمع في النطاق الحالي، نظراً لأن حاصل ضرب عددين نسبيين سالبين يكون موجباً. لهذا السبب فإننا سنحدد نفسنا بالتعامل أولا مع $\mathbf{R}^+$، وهي المجموعة التي تضم جميع الـ α $\mathbf{R}$ حيث $\alpha>0^*$.

إذا كانت α $\mathbf{R}^+$ و $\beta\in\mathbf{R}^+$، فإننا نحدد $\alpha\beta$ لتكن المجموعة التي تضم كل p بحيث $p\le sr$ لبعض الاختيارات لـ $r\in\alpha$, $s\in\beta$ و $r>0$, $s>0$. نحدد $\mathbf{1}^*$ لتكن المجموعة التي تضم كل $q<1$.

ينتج عن ذلك تحقق البديهيات (M) و (D) للتعريف ١، ١٢، بعد إحلال R^+ *محل F، وأخذ* 1^* *دور الـ 1.*

أن البرهان على ذلك متشابه جداً للبرهان الذي قدم بالتفصيل بالخطوة ٤ لذلك سوف لا نذكره هنا.

لاحظ، على وجه الخصوص، تحقيق المتطلب الثاني للتعريف ١، ١٧: إذا كانت $\alpha > 0^*$ و $\beta > 0^*$ فإن $\alpha\beta > 0^*$.

الخطوة ٧: نكمل تعريف عملية الضرب بوضع $0^* = \alpha\, 0^* = 0^*\alpha$، وكذلك

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{إذا كانت } \alpha < 0^* \text{ و } \beta < 0^*, \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{إذا كانت } \alpha < 0^* \text{ و } \beta > 0^*, \\ -[\alpha\cdot(-\beta)] & \text{إذا كانت } \alpha > 0^* \text{ و } \beta < 0^*. \end{cases}$$

تم تعريف حاصل الضرب في الجهة اليمنى بالخطوة ٦.

بعد أن أثبتنا(في الخطوة ٦) بأن البديهيات (M) تتحقق في R^+، أصبحت مسألة إثبات ذلك في R، سهلة جداً وذلك بإعادة تطبيق المتطابقة $\gamma = -(-\gamma)$ التي هي جزء من الفرضية ١، ١٤(راجع الخطوة ٥).

أن برهان قانون التوزيع

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

ينقسم إلى عدة حالات. على سبيل المثال، لنفترض أن $\alpha > 0^*$، $\beta < 0^*$، $\beta+\gamma > 0^*$. عندها فإن $\gamma = (\beta+\gamma) + (-\beta)$، و (بما أننا نَعْرِف الآن أن قانون التوزيع يتحقق في R^+)

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma) + \alpha\cdot(-\beta)\ .$$

ولكن $\alpha\cdot(-\beta) = -(\alpha\beta)$. لذلك فإن

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma)\ .$$

تعامل الحالات الأخرى بنفس الطريقة.

أكملنا الآن البرهان بأن R *هي حقل مرتب يمتلك خاصية القيد العلوي الأصغر.*

الخطوة ٨: نُعين لكل $r \in Q$ المجموعة r^* التي تتألف من $p \in Q$ بحيث $p < r$. من الواضح أن كل r^* هو قاطع cut؛ أي أن، $r^* \in R$. تحقق هذه القواطع العلاقات الآتية:

(أ) $r^* + s^* = (r+s)^*$،

(ب) $r^* s^* = (rs)^*$،

(ج) $r^* < s^*$ *إذا وإذا كان فقط* $r < s$.

لبرهنة (أ)، نختار $p \in r^* + s^*$. عندها فإن $p = u + v$، حيث $u < r$، $v < s$. إذن $p < r + s$، الذي يعني أن $p \in (r+s)^*$.

وبالعكس، نفترض $p \in (r+s)^*$. عندها فإن $p < r + s$ نختار t بحيث $2t = r + s - p$، نضع

$$r' = r - t \ , \ \ s' = s - t \ .$$

عندها فإن $r' \in r^*$، $s' \in s^*$، و $p = r' + s'$ بحيث $p \in r^* + s^*$.

أن هذا يبرهن (أ). أما برهان (ب) فإنه مشابه لهذا البرهان.

إذا كان $r < s$ فإن $r \in s^*$، ولكن $r \notin r^*$؛ إذن $r^* < s^*$.

إذا كان $r^* < s^*$، فيوجد هنالك $p \in s^*$ بحيث $p \notin r^*$. إذن $r \le p < s$، إذن $r < s$. وهذا يبرهن (ج).

الخطوة ٩: لاحظنا في الخطوة ٨ بأن استبدال الأرقام النسبية r بمثيلاتها من "القواطع النسبية" $r^* \in \mathbf{R}$ تحافظ على الجمع، حاصل الضرب، والترتيب. من الممكن صياغة هذه الحقيقة بالقول بأن الحقل المرتب $\mathbf{Q}$ هو *تشاكل تقابلياً* ***isomorphic*** للحقل المرتب $\mathbf{Q}^*$ الذي تتكون عناصره من القواطع النسبية. بالطبع، فإن r^* ليس نفس r لكل حال من الأحوال، ولكن الخصائص التي نحن بصددها (الحسابية والترتيب) هي متشابهة في المجالين.

إن هذا التطابق لـــ $\mathbf{Q}$ *مع* $\mathbf{Q}^*$ *هو الذي يتيح لنا اعتبار* $\mathbf{Q}$ *حقلاً جزئياً لـــ* $\mathbf{R}$.

يفهم الجزء الثاني من المبرهنة ١، ١٩من خلال أساس هذا التطابق. لاحظ بأن نفس الظاهرة تحدث *عندما* ينظر إلى الأرقام الحقيقية على أسس إنها حقل جزئي للحقل المركب، ويحدث نفس الشيء أيضا على مستوى ابتدائي جداً، عندما تعرف الأعداد الصحيحة بمجموعة جزئية معينة لـــ $\mathbf{Q}$.

إن كل حقلين مرتبين مع خاصية القيد العلوي الأصغر هما متشاكلين تقابلياً. هذه الحقيقة سوف لا نبرهنها هنا. لذلك فإن الجزء الأول من المبرهنة ١، ١٩يحدد خواص الحقل الحقيقي $\mathbf{R}$ بصوره كاملة.

إن الكتابين المذكورين في المراجع للاندو *Landau* وثرستون *Thurston* خصصا بصوره كلية لموضوع منظومات الأعداد. ويقدم الفصل الأول من كتاب نوب *Knopp* وصفاً ممتعاً للطريقة التي توصل إلى R من Q. وهنالك طريقه أخرى يتم بموجبها تعيين كل رقم حقيقي على أساس انه صف متكافئ لمتتاليات كوشي **Cauchy sequences** للأعداد النسبية (راجع الفصل الثالث) هذه الطريقة مذكورة في البند الخامس من كتاب هيوت *Hewitt* و ستروم برغ *Stromberg*.

اكتشفت القواطع في Q التي استعملناها هنا من قبل ددیکانید *Dedekind*. ويعود الفضل في بناء R من Q باستخدام متتاليات كوشي لــ كانتور **Cantor**. كلاً من كانتور ودديكانيد كان قد نشر طريقته خلال ١٨٧٢.

تمارين EXERCISES

ما لم يرد ما يشير خلافاً لذلك بصوره صريحة، فإن جميع الأعداد المذكورة في هذه التمارين هي أعداد حقيقية.

١- إذا كانت r عدداً نسبياً ($r \neq 0$) و x عدد غير نسبي، برهن أن كل من $r+x$ و rx عدداً غير نسبي.

٢- برهن على أنه لا يوجد عدد نسبي جذره التربيعي يساوي ١٢.

٣- برهن الفرضية ١، ١٥.

٤- لتكن E مجموعة جزئية مرتبة غير خالية ؛ أفترض أن α هي القيد السفلي لـــ E و β هي القيد العلوي لـــ E. برهن على أن $\alpha \leq \beta$.

٥- لتكن A مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية ومقيدة من الأسفل. لتكن $A-$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد $x-$، حيث $x \in A$. برهن على أن

$$\inf A = -\sup(-A).$$

٦- ضع $b > 1$.

(أ) إذا كانت m, n, p, q أعداد صحيحة، $n > 0$, $q > 0$، و $r = m/n = p/q$، برهن على أن

$$\left(b^m\right)^{1/n} = \left(b^p\right)^{1/q}.$$

من المفيد تعريف $b^r = (b^m)^{1/n}$.

(ب) برهن على أن $b^{r+s} = b^r b^s$ إذا كان r و s عددين نسبيين.

(ج) إذا كان x عدداً حقيقياً، اجعل من $B(x)$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد b^t، حيث t عدداً نسبياً و $t \leq x$. برهن على أن

$$b^r = \sup B(r)$$

عندما يكون r عددا نسبيا. إذن من المفيد تعريف

$$b^x = \sup B(x)$$

لكل عدد حقيقي x.

(د) برهن على أن $b^{x+y} = b^x b^y$ لجميع الأعداد الحقيقية x و y.

٧- ضع $b > 1$، $y > 0$، برهن على وجود عدد حقيقي وحيد x بحيث $b^x = y$، وذلك

بتكملة الخطوات الآتية. (يدعى هذا العدد x *بلوغاريتم* y *للأساس* b (***logarithm of y to the base b***).

(أ) لأي عدد صحيح موجب n، $b^n - 1 \geq n(b-1)$.

(ب) إذن $(b-1) \geq n(b^{1/n} - 1)$.

(ج) إذا كانت $t > 1$ و $n > (b-1)/(t-1)$، فإن $b^{1/n} < t$.

(د) إذا كانت w تحقق $b^w < y$، فإن $b^{w+(1/n)} < y$ للأعداد الكبيرة من n؛ للتوصل إلى ذلك، طبق الجزء (ج) بوضع $t = y.b^{-w}$.

(هـ) إذا كانت $b^w > y$، فإن $b^{w-(1/n)} > y$ للأعداد الكبيرة من n.

(و) لتكن A المجموعة التي تضم جميع الـ w بحيث $b^w < y$، وبين أن $x = \sup A$ يحقق $b^x = y$.

(ز) برهن على وحدانية هذا لـ x.

٨- برهن على أنه لا يمكن تحديد ترتيب في الحقل المركب الذي يحوله إلى حقل مرتب.

تلميح: 1- عدد مربع.

٩- أفترض أن $z = a + bi$, $w = c + di$. أفترض أن $z < w$ إذا كانت $a < c$، وكذلك إذا كانت $a = c$ ولكن $b < d$. برهن على أن هذا يحول المجموعة التي تضم جميع الأعداد المركبة إلى مجموعة مرتبه. (يسمى هذا النوع من علاقة الترتيب بـ*الترتيب القاموسي* ***lexicographic order***، *أو الترتيب المعجمي* ***dictionary order***، وذلك لأسباب واضحة). هل تمتلك هذه المجموعة المرتبة خاصية القيد العلوي الأصغر ؟

١٠- افترض أن $z = a + ib$، $w = u + iv$، و

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{1/2}$$

برهن على أن $z^2 = w$ إذا كانت $v \geq 0$ وبأن $(\bar{z})^2 = w$ إذا كانت $v \leq 0$. استنتج أن كل عدد عقدي (باستثناء واحد !)يمتلك جذرين تربيعين مركبين.

١١- إذا كان z عدداً عقدياً، برهن على وجود $r \geq 0$ وعدداً عقدياً w مع $|w| = 1$ بحيث $z = rw$. هل تحدد w و r دائماً بصوره منفردة من قبل z؟

١٢- إذا كانت $z_1,\dots,z_n$ أعدادا عقدية، برهن على أن $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

١٣- إذا كانت x و y أعدادا عقديه، برهن على أن

$$\big||x|-|y|\big| \le |x-y| .$$

١٤- إذا كان z عدداً عقدياً بحيث $|z|=1$، أو بكلمة أخرى، بحيث $z\bar{z}=1$، ما قيمة المقدار الأتي $|1+z|^2+|1-z|^2$.

١٥- تحت أي شروط تتحقق المطابقة في متباينة شوارز؟

١٦- افترض أن $k \ge 3$، $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ ، $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = d > 0$ و، $r > 0$ برهن ما يلي:

(أ) إذا كان $2r > d$ فإن هنالك ما لانهاية من $z \in \mathbf{R}^k$ بحيث

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}| = |\mathbf{z}-\mathbf{y}| = r \ .$$

(ب) إذا كان $2r = d$، فإن هنالك $\mathbf{z}$ واحد كهذا فقط.

(ج) إذا كان $2r < d$ فلا يوجد هنالك أي $\mathbf{z}$ كهذا.

كيف يجب أن تغير هذه العبارات إذا كان k هو **2** أو **1** ؟

١٧- برهن على أن

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$$

إذا كانت $\mathbf{x}\ \ \mathbf{R}^k$ و $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$. عبر عن ذلك هندسياً، بعبارة متوازيات الأضلاع.

١٨- إذا كان $k \ge 2$ و $\mathbf{x}\ \ \mathbf{R}^k$، برهن على وجود $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ بحيث $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$ ولكن $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$. هل يتحقق هذا إذا كان $k=1$ ؟

١٩- افترض أن $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^k$ ، $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^k$. أوجد $\mathbf{c}\ \ \mathbf{R}^k$ و $r > 0$ بحيث

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}| = 2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$$

إذا وإذا فقط كانت $|\mathbf{x}-\mathbf{c}| = r$

(الجواب: $(3\mathbf{c} = 4\mathbf{b}-\mathbf{a}, 3r = 2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|)$.

٢٠- إشارة إلى الملحق، افترض أن الخاصية (II I) حذفت من تعريف القاطع. ابقي على نفس تعاريف الترتيب والجمع. بين بأن المجموعة المرتبة الناتجة عن ذلك تمتلك خاصية القيد العلوي الأصغر، وبأن عملية الجمع تحقق البديهيات من (A1) إلى (A 4) (بعنصر مختلف قليلاً للصفر !) وان (A 5) لا تتحقق.

الفصل الثاني

أساسيات الطبولوجيـــا

- المجموعات المحدودة ، القابلة والغير قابلة للعد
- الفضاءآت المترية
- المجوعات المتراصة
- المجوعات التامة
- المجوعات المترابطة
- تمارين

الفصل الثاني
أساسيات الطبولوجيا
Basic Topolyogy

المجموعات المنتهية، القابلة، وغير القابلة للعد

Finite, Countable, And Uncountable Sets

نبدأ هذا البند بتعريف مفهوم الدالة.

٢، ١ تعريف: تأمل المجموعتين A و B، اللتين قد تكون عناصرهما أي شيء مهما كان، وأفترض أنه لكل عنصر x من A هنالك عنصراً يقابله (يرادفه)، بصيغة أو بأخرى، يقع في B، والذي نرمز له $f(x)$. عندها يقال عن f بأنها ***دالة*** ***function*** من A إلى B (*تصوير* أو *تطبيق* ***mapping*** A في B). تسمى المجموعة A ***المنطلق*** لـ ***domain of f*** (ونقول أيضاً أن f معرفة على A)، وتسمى العناصر $f(x)$ القيم لـ f، وتسمى المجموعة التي تضم جميع قيم f ***مدى*** لـ ***range of f***.

٢، ٢ تعريف: لتكن A و B مجموعتين ولتكن f تطبيق (تصوير) A في B. إذا كانت $E \subset A$، فإن $f(E)$ هي المجموعة التي تضم جميع العناصر $f(x)$، لـ $x \in E$. نسمي $f(E)$ ***الصورة*** ***image*** لـ E تحت f. في هذا الرمز، $f(A)$ هي مدى f. من الواضح أن $f(A) \subset B$. إذا كانت $f(A) = B$، فإننا نقول أن f (تصوير) تطبيق A ***فوق(شامل)*** ***onto B***. (لاحظ، أن كلمة ***فوق*** ***onto*** هي أكثر دقة من كلمة ***في*** ***into***، وفق هذا الاستخدام).

إذا كانت $E \subset B$، فإن $f^{-1}(E)$ ترمز إلى المجموعة التي تضم جميع $x \in A$ بحيث $f(x) \in E$. نسمي $f^{-1}(E)$ ***الصورة المعاكسة*** لـ ***inverse image of E*** تحت f. إذا كان $y \in B$، فإن $f^{-1}(y)$ هي المجموعة التي تضم جميع $x \in A$ بحيث $f(x) = y$. إذا كان، لكل $y \in B$، $f^{-1}(y)$ تتألف من عنصر واحد من A على الأكثر، فإن f هي تطبيق ***1 - 1 (واحد لواحد)*** (متباين) ***one - to- one*** لـ A في B. من الممكن التعبير عن ذلك

كما يلي: أن f هي تطبيق 1 - 1 في B شريطة أن تكون $f(x_1) \neq f(x_2)$ كلما كان $x_1 \neq x_2$، $x_1 \in A$, $x_2 \in A$.

(إن الرمز $x_1 \neq x_2$ يعني بأن x_1 و x_2 هما عنصرين مختلفين ؛خلاف ذلك فإننا نكتب $x_1 = x_2$).

٢، ٣ تعريف: إذا كان هناك تطبيق 1 - 1 لـ A فوق B *onto B*، فإننا نقول أنه بالإمكان وضع A و B *في مراسلة* 1-1 *correspondence* 1-1، و أن A و B يملكان نفس *الأعداد الأصلية* *cardinal number*، أو باختصار أن A و B *متكافئين* *equivalent*، ونكتب $A \sim B$. من الواضح أن هذه العلاقة تمتلك الخواص الآتية :

إنها *انعكاسية* *reflexive* : $A \sim A$.

إنها *متناظرة* *symmetric* : إذا كانت $A \sim B$، فإن $B \sim A$.

إنها *انتقالية* *transitive* : إذا كانت $A \sim B$ و $B \sim C$، فإن $A \sim C$.

إن أي علاقة تمتلك هذه الخواص الثلاثة تسمى علاقة *تكافئية* *equivalence relation*.

٢، ٤ تعريف: لأي عدد صحيح موجب n، لتكن J_n المجموعة التي عناصرها الأعداد الصحيحة $1,2,\ldots,n$؛ لتكن J المجموعة التي تتألف من جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. لأي مجموعة A، نقول :

(أ) أن A *منتهية* *finite* إذا كانت $A \sim J_n$ لبعض n (تعتبر المجموعة الفارغة منتهية أيضا).

(ب) أن A *لانهائية* (غير منتهية) *infinite* إذا لم تكن منتهية.

(ج) أن A *قابلة للعد* *countable* إذا كانت $A \sim J$.

(د) أن A *غير قابلة للعد* *uncountable* إذا لم تكن A منتهية ولا قابلة للعد.

(هـ) أن A *على الأكثر قابلة للعد* *a t most countable* إذا كانت A منتهية أو قابلة للعد.

في بعض الأحيان تسمى المجموعة *القابلة للعد* *enumerable*، أو *denumerable*.

لكل مجموعتين منتهيتين A و B، من الواضح أن $A \sim B$ إذا وإذا فقط كانت A و B تحتويان نفس العدد من العناصر. وبالنسبة للمجموعات اللانهائية، فإن فكرة " احتوائهما على نفس العدد من العناصر " تصبح مبهمة بالفعل، بينما يبقى رمز المراسلة 1 1 - على وضوحه.

٢، ٥ مثال: لتكن A المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة. عندها فإن A قابلة للعد. لأنه، لاحظ الترتيب الآتي للمجموعتين A و J :

$$A: 0,1,-1,2,-2,3,-3,...$$
$$J: 1,2,3,4,5,6,7,...$$

إننا نستطيع، في هذا المثال، أن نقدم صيغه لداله f من J إلى A التي تكون مراسلة 1-1 :

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (\text{زوجي } n),\\ -\dfrac{n-1}{2} & (\text{فردي } n).\end{cases}$$

٢، ٦ ملاحظة: لا يمكن للمجموعة المنتهية أن تكون مكافئه لأحد مجموعاتها الجزئية الفعلية. أن كون هذا الشيء، ممكناً بالنسبة للمجموعات اللانهائية، قد بيناه في المثال ٢، ٥، الذي تكون فيه J مجموعة جزئية فعليه لـ **proper subset of A**.

في الواقع، إننا نستطيع استبدال التعريف ٢، ٤ (ب) بالعبارة الآتية : المجموعة A هي مجموعة لانهائية إذا كانت A مكافئه لأحد مجموعاتها الجزئية الفعلية.

٢، ٧ تعريف: إننا نعني "*بالمتتالية*" ***sequence***، الدالة f المعرفة على المجموعة J التي تحتوي على جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. إذا كانت $f(n) = x_n$، لـ $n \in J$، من المألوف أن نرمز إلى المتتالية f بالرمز $\{x_n\}$، أو في بعض الأحيان بالرمز $x_1, x_2, x_3, ...$ أن قيم f، التي، هي العناصر x_n تسمى *حدود* ***terms*** المتتالية. إذا كانت A مجموعة وكانت $x_n \in A$ لجميع $n \in J$، فإن $\{x_n\}$ تسمى *المتتالية في* ***sequence in A***، أو *متتالية من العناصر لـ* A ***sequence of elements of***.

لاحظ أن الحدود $x_1, x_2, x_3, ...$ للمتتالية لا تحتاج لأن تكون مختلفة (متميزة).

بما أن كل مجموعة قابلة للعد هي المدى لدالة 1-1 المعرفة على J، فإننا نستطيع أن نعتبر كل مجموعة قابلة للعد كمدى للمتتالية من الحدود المتميزة. وبكلام تعوزه الدقة، نستطيع القول

بأن عناصر كل مجموعة قابلة للعد من الممكن "ترتيبها في متتالية" " arranged in a sequence".

في بعض الأحيان يكون من الملائم استبدال J في هذا التعريف بالمجموعة التي تحتوي على جميع الأعداد الصحيحة الغير سالبه، أي، البدء بالعدد 0 بدلاً من 1.

٢، ٨ مبرهنة: *كل مجموعة جزئية لانهائية لمجموعة قابلة للعد A قابلة للعد.*

البرهان: نفترض أن $E \subset A$ وE مجموعة لانهائية. رتب العناصر x التابعة لــ A في متتالية $\{x_n\}$ ذات العناصر المتميزة. كوّن متتالية $\{n_k\}$ كالآتي :

لتكن n_1 أصغر عدد صحيح موجب بحيث $x_{n_1} \in E$. بعد أن نختار $n_1,\dots,n_{k-1}$ ($k = 2,3,4,\dots$)، لتكن n_k أصغر عدد صحيح أكبر من n_{k-1} بحيث $x_{nk} \in E$.

بوضع $f(k) = x_{nk}$ ($k = 1,2,3,\dots$)، فإننا نحصل على مراسلة 1 - 1 بين E وJ.

بشكل تقريبي، تبين المبرهنة، بأن المجموعات القابلة للعد تمثل " أصغر" مجموعة لانهاية : لا يمكن للمجموعة الغير قابلة للعد أن تكون مجموعة جزئية لمجموعة قابلة للعد.

٢، ٩ تعريف: لتكن A و Ω مجموعتين، ولنفترض أن لكل عنصر α من A هنالك مجموعة جزئية لــ Ω مرادفه associated التي نرمز لها بالرمز E_α.

سنرمز للمجموعة التي عناصرها المجموعات E_α بالرمز $\{E_\alpha\}$. وبدلاً من التحدث عن ***مجموعات المجموعات*** ***sets of sets***، سنقول في بعض الأحيان ***طائفة المجموعات*** ***collection of sets***، أو ***عائلة المجموعات*** ***family of sets***.

نعرف ***اتحاد union*** المجموعات E_α بالمجموعة S بحيث $x \in S$ إذا وإذا فقط كانت $x \in E_\alpha$ على الأقل $\alpha \in A$ واحدة. نستخدم الرمز

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \qquad (١)$$

إذا كانت A تتألف من الأعداد الصحيحة $1,2,\dots,n$، وغالباً ما نكتب

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \qquad (٢)$$

أو

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \ . \qquad (٣)$$

إذا كانت A المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة الموجبة، الرمز الاعتيادي هو

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \ . \tag{٤}$$

لا يشير الرمز ∞ في (٤) إلى اكثر من إننا نتناول اتحاد طائفة المجموعات القابلة للعد، ويجب أن لا يخلط مع الرمزين $-\infty$ ، $+\infty$، اللذين قدمناهما بالتعريف ١، ٢٣.

يعرف *التقاطع* ***intersection*** للمجموعات E_α بأنه المجموعة P بحيث $x \in P$ إذا وإذا فقط كان $x \in E_\alpha$ لكل $\alpha \in A$. إننا نستخدم الرمز

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \ , \tag{٥}$$

أو

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n , \tag{٦}$$

أو

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_\alpha , \tag{٧}$$

بالنسبة للاتحادات. إذا كان $A \bigcap B$ غير خالية، فإننا نقول بأن A و B ***يتقاطعان intersect***؛ خلافاً لذلك فإنهما ***منفصلان disjoint***.

٢، ١٠ أمثلـــة :

(أ) أفترض أن E_1 تتألف من 3 , 2 , 1 و E_2 تتألف من 4 ,3 , 2. عندها فإن $E_1 \cup E_2$ تتألف من 4 , 3 , 2 , 1، بينما $E_1 \cap E_2$ تتألف من 3, 2.

(ب) لتكن A المجموعة التي تضم الأعداد الحقيقية x بحيث $0 < x \leq 1$. لكل $x \in A$، لتكن E_x مجموعة الأعداد الحقيقية y بحيث $0 < y < x$. عندها فإن

(i) $E_x \subset E_z$ إذا وإذا فقط كان $0 < x \leq z \leq 1$ ؛

(ii) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$ ؛

(iii) $\bigcap_{x \in A} E_x$ مجموعة فارغة ؛

(i) و (ii) واضحة جداً. لبرهنة (iii)، نلاحظ أنه لكل $y > 0$، $y \notin E_x$ إذا كانت $x < y$. إذن $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

٢، ١١ ملاحظات: إن العديد من خواص الاتحادات والتقاطعات متشابهة إلى حد كبير لخواص حاصل الجمع وحاصل الضرب ؛ وفي الحقيقة، فإن الكلمات حاصل الجمع وحاصل الضرب تستخدم أحياناً في هذا المجال وإن الرموز $\sum$ و $\prod$ تكتب بدلاً من $\bigcup$ و $\bigcap$.

إن قانوني الإبدال و التجميع واضحة :

$$A\cup B=B\cup A \quad ; \quad A\cap B=B\cap A \tag{٨}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C); \quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \tag{٩}$$

الأمر الذي يبرر حذف الأقواس في (٣) و (٦).

أن قانون التوزيع يتحقق أيضاً :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{١٠}$$

لبرهنة ذلك، نرمز إلى العناصر في يسار ويمين (١٠) بـــ E وF، على التوالي.

نفترض أن $x\in E$. عندها فإن $x\in A$ و $x\in B\cup C$، أي أن، $x\in B$ أو $x\in C$ (من الجائز في كليهما). إذن $x\in A\cap B$ أو $x\in A\cap C$، وهذا يعني أن $x\in F$. لذلك فإن $E\subset F$.

الخطوة التالية، نفترض أن $x\in F$. عندها فإن $x\in A\cap B$ أو $x\in A\cap C$. أي أن، $x\in A$، و $x\in B\cup C$. إذن $x\in A\cap(B\cup C)$، لذلك تكون $F\subset E$.

نستنتج من ذلك أن $E=F$.

ندرج أدناه بعض العلاقات الأخرى التي يمكن إثباتها بسهولة :

$$A\subset A\cup B\ , \tag{١١}$$

$$A\cap B\subset A\ . \tag{١٢}$$

إذا كان الـــ 0 يرمز إلى المجموعة الخالية، فإن

$$A\cup 0=A\ , \qquad A\cap 0=0\ . \tag{١٣}$$

إذا كانت $A\subset B$، فإن

$$A\cup B=B, \qquad A\cap B=A\ . \tag{١٤}$$

٢، ١٢ مبرهنة: *لتكن* $\{E_n\}$، $n=1,2,3,...$، *متتالية من المجموعات القابلة للعد، ونضع*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad . \tag{١٥}$$

عندها فإن S قابلة للعد.

البرهان: لنقم بترتيب كل مجموعة E_n في متتالية $\{x_{nk}\}$، $k = 1,2,3,\ldots$، ونلاحظ الترتيب اللانهائي.

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{١٦}$$

والذي يشكل فيه الصف النوني عناصر E_n. أن الترتيب يحتوي على جميع عناصر S. وكما هو مؤشَر بالأسهم، فإنه من الممكن ترتيب هذه العناصر في متتالية

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14} \ldots \tag{١٧}$$

إذا كانت أياً من مجموعتين E_n تمتلك عناصر مشتركة، فإن ذلك سوف يظهر أكثر من مرة في (١٧). إذن توجد هنالك مجموعة جزئية T للمجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة الموجبة بحيث $S \sim T$، التي تبين بأن S هي على الأكثر قابلة للعد (المبرهنة ٢، ٨). بما أن $E_1 \subset S$، و E_1 لانهائية، فإن S لانهائية، ولذلك فهي قابلة للعد.

نتيجة:

نفرض أن A هي قابلة للعد على الأكثر، ولكل $\alpha \in A$، B_α قابلة للعد على الأكثر. نضع

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \quad .$$

عندها فإن T قابلة للعد على الأكثر.

لان T هي مكافئه للمجموعة الجزئية لـــ (١٥).

٢، ١٣ مبرهنة: *لتكن A مجموعة قابلة للعد، ولتكن B_n المجموعة التي تضم جميع القوى النونية $(a_1,\ldots,a_n)$، حيث $a_k \in A$ $(k = 1,\ldots,n)$، وليس بالضرورة أن تكون العناصر $a_1,\ldots,a_n$ متميزة. عندها فإن B_n قابلة للعد.*

البرهان: حيث أن B_1 قابلة للعد بشكل واضح، وان $B_1 = A$. نفترض أن B_{n-1} قابلة للعد

$n =$) $2,3,4,\ldots$). عندها فإن عناصر B_n بالشكل الأتي

$$(b,a) \quad (b \in B_{n-1}, a \in A) \,. \qquad (١٨)$$

لكل b ثابتة، فإن المجموعة التي تضم الأزواج (b,a) مكافئه لـ A، إذن فهي قابلة للعد. لذلك فإن B_n هي الاتحاد لمجموعة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد. استناداً للمبرهنة ٢، ١٢، فإن B_n قابلة للعد.

أن المبرهنة تستنتج بطريقة الاستقراء الرياضي.

نتيجة: *المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية قابلة للعد.*

البرهان: نطبق المبرهنة ٢، ١٣بجعل $n = 2$، وبملاحظة أن كل عدد نسبي r يكون بالشكل b/a، حيث a و b أعداد صحيحه. أن مجموعة الأزواج (a,b)، وتبعاً لذلك مجموعة الكسور b/a، قابلة للعد. في واقع الأمر، حتى المجموعة التي تضم جميع الأعداد الجبرية قابلة للعد (راجع التمرين رقم ٢). أن عدم كون جميع المجموعات اللانهائية، قابلة للعد، مبيناً بالمبرهنة الآتية :

٢، ١٤مبرهنة: *لتكن A المجموعة التي تضم جميع المتتاليات التي عناصرها العددين الصحيحين 0 و1. أن هذه المجموعة غير قابلة للعد.*

أن عناصر A هي المتتاليات المشابهة لـ $1,0,0,1,0,1,1,1,\ldots$.

البرهان: لتكن E مجموعة جزئية قابلة للعد من A، ولتكن E تتألف من المتتاليات $s_1, s_2, s_3, \ldots$. نكون متتالية s كآلاتي إذا كان الرقم النوني في s_n هو 1، نجعل الرقم النوني في s صفر، والعكس بالعكس. عندها فإن المتتالية s تختلف عن كل عنصر من E بما لا يقل عن موقع واحد؛ إذن $s \notin E$. ولكن من الواضح أن $s \in A$، لذلك فإن E مجموعة جزئية فعليه لـ A.

يجب أن نبين بأن كل مجموعة جزئية قابلة للعد في A هي مجموعة جزئية فعلية. نستنتج من ذلك أن A غير قابلة للعد (لان خلاف ذلك سيجعل من A مجموعة جزئية فعليه لـ A، وهذا شيء عديم المعنى).

استخدمت فكرة البرهان أعلاه لأول مره من قبل كانتور Cantor's، وهي تسمى خطوه كانتور القطرية ؛وذلك لأنه إذا تم استبدال المتتاليات $s_1, s_2, s_3, \ldots$ بشعاع *array* مثل (١٦)، فإن العناصر على القطر هي التي تدخل في بناء المتتالية الجديدة.

إن القراء المطلعون على التمثيل الثنائي للأعداد الحقيقية (الأساس ٢ بدلاً من ١٠) سوف يلاحظون بأن المبرهنة ٢، ١٤ تؤدي ضمنياً إلى أن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد. سوف نقدم برهاناً ثانياً لهذه الحقيقة في المبرهنة٢، ٤٣.

فضاءآت مترية Metric Spaces

٢، ١٥ تعريف: المجموعة X، التي سنسمي عناصرها "نقاط" **points**، يقال لها فضاءً مترياً metric *space* إذا كان لأي نقطتين p و q في X عدداً حقيقياً مرادفاً $d(p,q)$، يسمى *المسافة distance* من p إلى q، بحيث

(أ) $d(p,q)>0$ إذا كانت $p\neq q$ ؛ $d(p,p)=0$ ؛

(ب) $d(p,q)=d(q,p)$ ؛

(ج) $d(p,q)\le d(p,r)+d(r,q)\ ,\ \forall\, r\in X$.

إن أي دالة تمتلك الخواص أعلاه تسمى *دالة المسافة function distance*، أو *المترية metric*.

٢، ١٦ أمثلـــة: إن اكثر الأمثلة أهميه للفضاءآت المترية، من وجهة نظرنا، هي الفضاءآت الأقليدية $\mathbf{R}^k$، وعلى وجه الخصوص $\mathbf{R}^1$ (الخط الحقيقي) و $\mathbf{R}^2$ (المستوي المركب)؛ تعرف المسافة في $\mathbf{R}^k$ بما يلي:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\quad(\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^k)\qquad(١٩)$$

استناداً للمبرهنة ١، ٣٧، فإن شروط التعريف ٢، ١٥ تتحقق بــ (١٩).

من المهم ملاحظة أن كل مجموعة جزئية Y لفضاء متري X هي فضاء متري بحد ذاتها، وتمتلك نفس دالة المسافة. لأنه من الواضح إذا تحققت الشروط (أ) إلى (ج) للتعريف ٢، ١٥ لكل $p,q,r\in X$، فإنها تتحقق أيضا إذا حددنا p,q,r تقع في Y.

لذلك فإن كل مجموعة جزئية لفضاء اقليدي هي فضاء متري. المثالين الآخرين هما الفضائيين $\mathcal{C}(K)$ و $L^2(\mu)$ اللذين سنناقشه في الفصلين السابع والحادي عشر، على التوالي.

٢، ١٧ تعريف: نقصد *بالقطعة segment* (a,b) المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $a<x<b$.

نقصد *بالفترة* ***interval*** $[a,b]$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $a \le x \le b$.

بين فتره وأخرى، سنجابه "الفترات النصف مفتوحة" **"half-open intervals"**، $[a, b)$ و $(a,b]$; الأول يتألف من كل x بحيث $a \le x < b$، الثاني يتألف من كل x بحيث $a < x \le b$.

إذا كانت $a_i < b_i$ لـــ $i = 1,\dots,k$، فإن المجموعة التي تضم جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_k)$ في R^k والتي تحقق احداثياتها المتباينات $a_i \le x_i \le b_i$ $(1 \le i \le k)$ تسمى *الخلية* – k (***k- cell***). لذلك فإن الخلية –1 هي فترة، الخلية – 2 هي مستطيل، . . . الخ.

إذا كانت $\mathbf{x} \in \mathsf{R}^k$ و $r > 0$، فإن *الكرة* ***ball*** *المفتوحة* ***open*** (أو المغلقة **or closed**) B التي يقع مركزها على $\mathbf{x}$ ونصف قطرها r المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{y} \in \mathsf{R}^k$ بحيث $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r$ (أو $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \le r$).

نسمي المجموعة $E \subset \mathsf{R}^k$ *محدبة* ***convex*** إذا كانت

$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in E$$

كلما كان $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$, $0 < \lambda < 1$.

على سبيل المثال، *الكرات محدبة*. وذلك لأنه إذا كانت $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$, $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < r$, $0 < \lambda < 1$، فإن

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| &= |\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (1-\lambda)(\mathbf{z} - \mathbf{x})| \\ &\le \lambda |\mathbf{y} - \mathbf{x}| + (1-\lambda)|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < \lambda r + (1-\lambda) r \\ &= r. \end{aligned}$$

نفس البرهان يطبق على الكرات المغلقة. وبنفس الوقت فإنه من السهل أن نرى أن الخلايا – k محدبة.

٢، ١٨تعريف: لتكن X فضاءاً مترياً. أن جميع النقاط والمجموعات المذكورة أدناه هي عناصر ومجموعات جزئية لـــ X.

(أ) أن *الجوار* ***neighborhood*** للنقطة p هي المجموعة $N_r(p)$ التي تتألف من جميع

النقاط q بحيث $d(p,q) < r$. يسمى العدد r *نصف قطر* لـ $N_r(p)$ *radius of* $N_r(p)$.

(ب) النقطة p هي نقطة *غاية* ***limit*** للمجموعة E إذا كان كل جوار لـ p يحتوي على نقطه $q \neq p$ بحيث $q \in E$.

(ج) إذا كانت $p \in E$ و p ليست نقطة غاية لـ E، عندها فإن p تسمى نقطة *منعزلة* لـ E *isolated point of E*.

(د) E مجموعة *مغلقة* ***closed*** إذا كانت كل نقطة غاية لـ E هي نقطه في E.

(هـ) النقطة p هي نقطه *داخلية* ***interior*** في E إذا كان هنالك جوار N لـ p بحيث $N \subset E$.

(و) E مجموعة *مفتوحة* ***open*** إذا كانت كل نقطه في E هي نقطة داخلية في E.

(ز) *المتممة* لـ E ***complement of E*** (يرمز لها E^c) هي المجموعة التي تضم جميع النقاط $p \in X$ بحيث $p \notin E$.

(ح) E مجموعة *تامة* ***perfect*** إذا كانت E مغلقة وكانت كل نقطه من E هي نقطة غاية في E.

(ط) E مجموعة *مقيدة* ***bounded*** إذا كان هنالك عدد حقيقي M ونقطه $q \in X$ بحيث $d(p,q) < M$ لكل $p \in E$.

(ي) E *كثيفة (مركزة)* ***dense*** في X إذا كانت كل نقطه من نقاط X هي نقطة غاية لـ E، أو نقطه في E (أو كلاهما).

يلاحظ أن الجوار في R^1 هي قطعة، بينما في R^2 يكون الجوار داخل الدوائر.

٢، ١٩ مبرهنة: *كل جوار هو مجموعة مفتوحة.*

البرهان: نلاحظ الجوار $E = N_r(p)$، ولتكن q أية نقطه في E. عندها فيوجد هنالك عدد حقيقي موجب h بحيث

$$d(p,q) = r - h .$$

لجميع النقاط s بحيث $d(q,s) < h$، هنالك

$$d(p,s) \leq d(p,q) + d(q,s) < r - h + h = r,$$

بحيث $s \in E$. لذلك فإن q هي نقطة داخلية لـ E.

٢، ٢٠ مبرهنة: *إذا كانت p نقطة غاية للمجموعة E، فإن كل جوار لـــ p يحتوي على مالانهاية من نقاط E.*

البرهان: نفترض أن هنالك جوار N لـــ p والذي يحتوي على عدد محدد (منتهى) فقط من نقاط E. لتكن $q_1,\ldots,q_n$ تلك النقاط التابعة لـــ $N\cap E$ والتي تختلف عن p، و نضع

$$r = \min_{1\le m\le n} d(p,q_m)$$

[نستخدم هذا الرمز للإشارة إلى أصغر الأعداد $d(p,q_1),\ldots,d(p,q_n)$]. من الواضح أن العدد الأصغر من بين مجموعة منتهية للأعداد الموجبة هو موجب، لذلك فإن $r > 0$.

لا يحتوي الجوار $N_r(p)$ أية نقطه q من E بحيث $q \neq p$، لذلك فإن p ليست نقطة غاية لـــ E. أن هذا التناقض يثبت صحة المبرهنة.

نتيجة: *المجموعة المنتهية من النقاط لا تمتلك نقاط غاية.*

٢، ٢١ أمثلة: لندرس المجموعات الجزئية الآتية لـــ $\mathbb{R}^2$:

(أ) المجموعة التي تضم جميع الأعداد العقدية z بحيث $|z| < 1$.

(ب) المجموعة التي تضم جميع الأعداد العقدية z بحيث $|z| \le 1$.

(ج) مجموعة منتهية.

(د) المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة.

(هـــ) المجموعة التي تتألف من الأعداد $1/n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$. نلاحظ أن هذه المجموعة E تمتلك نقطة غاية (وبالتحديد، $z = 0$) ولكن لا توجد في E أي نقطة هي نقطة غاية لـــ E؛ نود أن نؤكد على الاختلاف بين امتلاك نقطة غاية و احتواء واحدة منها.

(و) المجموعة التي تضم جميع الأعداد العقدية، (التي هي $\mathbb{R}^2$).

(ز) القطعة (a, b).

لنلاحظ أنه من الممكن اعتبار (د)، (هــ) و (ز) مجموعات جزئية لـــ $\mathbb{R}^1$. يبين الجدول أدناه. بعض خواص هذه المجموعات :

	مغلقة	مفتوحة	تامة	مقيدة
(أ)	كلا	نعم	كلا	نعم
(ب)	نعم	كلا	نعم	نعم

(ج)	نعم	كلا	كلا	نعم
(د)	نعم	كلا	كلا	كلا
(هـ)	كلا	كلا	كلا	نعم
(و)	نعم	نعم	نعم	كلا
(ز)	كلا		كلا	نعم

في (ز)، تركنا المدخول الثاني فارغاً. السبب لذلك هو أن القطعة (a,b) غير مفتوحة إذا اعتبرناها جزئية لـ R^2، ولكنه مجموعة مفتوحة لـ R^1.

٢، ٢٢ مبرهنة: *لتكن $\{E_\alpha\}$ طائفة (عائلة المجوعات، مجموعة المجوعات)* ***collection*** *E_α (منتهية أو لانهائية). عندها فإن*

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha \left(E_\alpha^c\right) . \qquad (٢٠)$$

البرهان: لتكن A و B العناصر في يسار ويمين (٢٠). إذا كانت $x \in A$، فإن $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$، إذن $x \notin E_\alpha$ لأي α، إذن $x \in E_\alpha^c$ لكل α، بحيث $x \in \bigcap E_\alpha^c$. لذلك فإن $A \subset B$.

وبالعكس، إذا كانت $x \in B$، فإن $x \in E_\alpha^c$ لكل α، إذن $x \notin E_\alpha$ لكل α، إذن $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$، بحيث $x \in \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c$. لذلك فإن $B \subset A$.

نستنتج من ذلك أن $B = A$.

٢، ٢٣ مبرهنة: *المجموعة E مفتوحة إذا وإذا فقط كانت المجموعة المتممة لها مغلقة.*

البرهان: أولاً، نفرض أن E^c مغلقة. نختار $x \in E$. عندها فإن $x \notin E^c$، و x ليست نقطة غاية لـ E^c. إذن يوجد هنالك جوار N لـ x بحيث $E^c \cap N$ خالية، أي أن، $N \subset E$. إذن فإن x نقطة داخلية لـ E، و E مفتوحة.

الخطوة التالية، نفترض أن E مفتوحة. لتكن x نقطة غاية لـ E^c. عندها فكل جوار لـ x يحتوي على نقطة في E^c، بحيث x ليست نقطة داخلية لـ E. بما أن E مفتوحة، فإن ذلك يعني أن $x \in E^c$. نستنتج من ذلك أن E^c مغلقة.

نتيجة: *المجموعة F مغلقة إذا وإذا فقط كانت المجموعة المتممة لها مفتوحة.*

٢، ٢٤ مبرهنة: (أ) *لأي طائفة* $\{G_\alpha\}$ *لمجموعات مفتوحة،* $\bigcup_\alpha G_\alpha$ *مفتوحة.*

(ب) *لأي طائفة* $\{F_\alpha\}$ *لمجموعات مغلقة،* $\bigcap_\alpha F_\alpha$ *مغلقة.*

(ج) *لأي طائفة منتهية* $G_1,\ldots,G_n$ *لمجموعات مفتوحة،* $\bigcap_{i=1}^n G_i$ *مفتوحة.*

(د) *لأي طائفة منتهية* $F_1,\ldots,F_n$ *لمجموعات مغلقة،* $\bigcup_{i=1}^n F_i$ *مغلقة.*

البرهان: نضع $G=\bigcup_\alpha G_\alpha$. إذا كانت $x\in G$، فإن $x\in G_\alpha$ لبعض α. بما أن x نقطة داخلية لـــ G_α، فإن x أيضاً نقطة داخلية لـــ G، و G مفتوحة. أن هذا يبرهن (أ).

استنادا للمبرهنة ٢، ٢٢،

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c=\bigcup_\alpha\left(F_\alpha^c\right), \tag{٢١}$$

و F_α^c مفتوحة، استنادا للمبرهنة ٢، ٢٣. إذن (أ) تدل ضمنياً بأن (٢١) مفتوحة بحيث $\bigcap_\alpha F_\alpha$ مغلقة.

الخطوة التالية، نضع $H=\bigcap_{i=1}^n G_i$. لأي $x\in H$، هنالك جوار N_i لـــ x بنصف قطر r_i، بحيث $N_i\subset G_i$ $(i=1,\ldots,n)$. نضع

$$r=\min(r_1,\ldots,r_n),$$

ولتكن N الجوار لـــ x بنصف قطر r. عندها فإن $N\subset G_i$ لـــ $i=1,\ldots,n$، بحيث $N\subset H$، و H مفتوحة.

بأخذ المتممات، فإن (د) تستنتج من (ج) :

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^n\left(F_i\right)^c.$$

٢، ٢٥ أمثلة: في الجزئيين (ج) و (د) من المبرهنة السابقة كانت صفة المنتهية للطائفتين مهمة جداً. على سبيل المثال لتكن G_n القطع $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,3,\ldots)$. عندها فإن G_n مجموعة جزئية مفتوحة لـــ $\mathbf{R}^1$. نضع $G=\bigcap_{i=1}^\infty G_n$. عندها فإن G تتألف من نقطة واحدة (بالتحديد، $x=0$) لذلك فهي ليست مجموعة جزئيه مفتوحة لـــ $\mathbf{R}^1$.

لذلك فإن تقاطع طائفة لانهائية لمجموعات مفتوحة ليس بالضرورة مفتوحاً. وبنفس الطريقة، فإن اتحاد طائفة لانهائية لمجموعات مغلقة ليس بالضرورة مغلقاً.

٢، ٢٦ تعريف: إذا كانت X فضاءا مترياً، وإذا كانت $E \subset X$، وإذا كانت E' ترمز إلى المجموعة التي تضم جميع النقاط الغاية لـ E في X، عندها فإن *انغلاق* لـ E ***closure of E*** $\overline{E}$ هو المجموعة $\overline{E} = E \cup E'$.

٢، ٢٧ مبرهنة: *إذا كانت X فضاءا مترياً و $E \subset X$، فإن*

(أ) $\overline{E}$ مغلقة،

(ب) $E = \overline{E}$ إذا وإذا فقط كانت E مغلقة،

(ج) $\overline{E} \subset F$ لكل مجموعة مغلقة $F \subset X$ بحيث $E \subset F$.

استنادا إلى (أ) و (ج)، $\overline{E}$، هو *أصغر مجموعة مغلقة* لـ ***smallest closed subset of X*** *التي تحتوي E.*

البرهان:

(أ) إذا كانت $p \in X$ و $p \notin \overline{E}$ عندها فإن p ليست نقطة في E ولا نقطة غاية لـ E. إذن p تمتلك جوار لا يقاطع E. لذلك فإن المتممة لـ $\overline{E}$ مفتوحة. إذن $\overline{E}$ معلقة.

(ب) إذا كانت $E = \overline{E}$، نستدل من (أ) على أن E مغلقة. إذا كانت E مغلقة، فإن $E' \subset E$ [استنادا للتعريفين ٢، ١٨ (د) و ٢، ٢٦]، إذن $\overline{E} = E$.

(ج) إذا كانت F مغلقة و $F \supset E$، عندها فإن $F \supset F'$، إذن $F \supset E'$. لذلك فإن $F \supset \overline{E}$.

٢، ٢٨ مبرهنة: *لتكن E مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية مقيدة من الأعلى. لتكن $y = \sup E$. عندها فإن $y \in \overline{E}$. إذن $y \in E$ إذا كانت E مغلقة.*

قارن ذلك مع الأمثلة في البند ١، ٩.

البرهان إذا كانت $y \in E$ فإن $y \in \overline{E}$. لنفترض أن $y \notin E$. لكل $h > 0$ عندها توجد نقطة $x \in E$ بحيث $y - h < x < y$، وذلك لأنه خلافاً لذلك ستكون $y - h$ قيداً علوياً لـ E. لذلك فإن y نقطة غاية لـ E. إذن $y \in \overline{E}$.

٢، ٢٩ ملاحظة: نفترض أن $E \subset Y \subset X$، حيث X فضاءا مترياً. حين نقول أن E مجموعة جزئيه مفتوحة في X فإن ذلك يعني أنه لكل نقطة $p \in E$ هنالك عدداً موجباً قريناً r

بحيث أن الشرطين $d(p,q) < r$, $q \in X$ يدلان على أن $q \in E$. ولكننا لاحظنا (البند ٢، ١٦) بأن Y هي أيضاً فضاءاً مترياً، لذلك فإن تعاريفنا بنفس الوقت تشمل Y. لكن واضحين بخصوص هذه النقطة، لنقل أن E *مفتوحة نسبياً* لــ Y ***open relative of Y*** إذا كان لكل $p \in E$ هنالك $r > 0$ رديف له بحيث $q \in E$ كلما كانت $d(p,q) < r$ و $q \in Y$.

بيّن المثال ٢، ٢١ (ز) بأن المجموعة قد تكون مفتوحة نسبياً لــ Y بدون أن تكون مجموعة جزئية مفتوحة لــ X. هنالك علاقة بسيطة بين هذه المفاهيم، سنذكرها الآن.

٢، ٣٠ مبرهنة: *لنفترض* $Y \subset X$. *المجموعة الجزئية* E *لــ* Y *مفتوحة نسبياً لــ* Y *إذا وإذا فقط كانت* $E = Y \cap G$ *لبعض المجموعات الجزئية المفتوحة* G *لــ* X.

البرهان: نفترض أن E مفتوحة نسبياً لــ Y. لكل $p \in E$ هنالك عدد اً موجباً r_p بحيث أن الشرطين $d(p,q) < r_p$, $q \in Y$ يدلان على أن $q \in E$. لتكن V_p المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < r_p$، ونعرف

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p .$$

عندها فإن G مجموعة جزئيه مفتوحة لــ X، استناداً للمبرهنتين ٢، ١٩ و ٢، ٢٤.

بما أن $p \in V_p$ لجميع $p \in E$، من الواضح أن $E \subset G \cap Y$.

ووفقاً لاختيارنا V_p، فإن $V_p \cap Y \subset E$ لكل $p \in E$، لذلك فإن $G \cap Y \subset E$. إذن $E = G \cap Y$، وبذلك فإن نصف المبرهنة قد برهن.

وبالعكس، إذا كانت G مفتوحة في X و $E = G \cap Y$، فإن كل $p \in E$ يمتلك الجوار $V_p \subset G$. عندها فإن $V_p \cap Y \subset E$، لذلك فإن E مفتوحة نسبياً لــ Y.

المجموعات المتراصة Compact Sets

٢، ٣١ تعريف: نقصد بعبارة *الغطاء المفتوح* *open cover* للمجموعة E في الفضاء المتري X، تلك الطائفة **collection** $\{G_\alpha\}$ للمجموعات الجزئية المفتوحة لــ X بحيث $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

٢، ٣٢ تعريف: يقال للمجموعة الجزئية K للفضاء المتري X بأنها *متراصة* ***compact*** إذا كان كل غطاء مفتوح لــ K يحتوي على غطاء جزئي منتهي ***finite subcover***.

بصورة أكثر وضوحاً، فإن الشرط هو أنه إذا كانت $\{G_\alpha\}$ غطاءً مفتوحاً لـ K، فإن هنالك أعداداً منتهياً من الأدلة $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ بحيث

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \ .$$

إن مفهوم التراص يحمل أهمية كبيرة في التحليل الرياضي، وعلى الخصوص في مجال الاستمرارية (الفصل الرابع).

من الواضح أن كل مجموعة منتهية هي متراصة. أن وجود صف كبير من المجموعات اللانهائية المتراصة في R^k سوف سيستنتج من المبرهنة ٢، ٤١.

لاحظنا سابقاً (في البند ٢، ٢٩) بأنه إذا كانت $E \subset Y \subset X$، فإن E قد تكون مفتوحة نسبياً (مقارنة) لـ Y بدون أن تكون مفتوحة نسبياً لـ X. إذن فإن خاصية المجموعات المفتوحة تعتمد على الفضاء الذي تشغله E. ونفس الشيء ينطبق على خاصية المجموعات المغلقة.

سوف نلاحظ الآن، بأن التعامل مع التراص أفضل من ذلك، لتكن المبرهنة القادمة، لنقُل، مؤقتاً بأن، K مجموعة متراصة بالنسبة (مقارنة) لـ X إذا تحققت متطلبات التعريف ٢، ٣٢.

٢، ٣٣ مبرهنة: *لنفترض أن $K \subset Y \subset X$. عندها فإن K متراصة نسبياً لـ X إذا وفقط إذا كانت K متراصة نسبياً (مقارنة) لـ Y.*

بفضل هذه المبرهنة نستطيع، في حالات متعددة، أن نعتبر المجموعات المتراصة فضاءآت مترية بحد ذاتها، بدون أن نعير أية أهميه إلى أي فضاء مشغول. وبصوره خاصة فإنه، وعلى الرغم من الحديث عن *الفضاءآت المفتوحة* ***open spaces***، أو *الفضاءآت المغلقة* ***closed spaces*** (كل فضاء متري X هو مجموعة جزئيه مفتوحة على نفسها، وهو مجموعة جزئيه مغلقة على نفسها)، يعطي مفهوماً ضيقاً ولكنه من المفيد التحدث عن الفضاءآت المترية المتراصة **compact metric**.

البرهان: لنفترض أن K متراصة نسبياً لـ X، ولتكن $\{V_\alpha\}$ طائفة المجموعات، مفتوحة نسبياً لـ Y بحيث $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. استناداً للمبرهنة ٢، ٣٠، هنالك مجموعات G_α، مفتوحة نسبياً لـ X، بحيث $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$، لكل α ؛وبما أن K متراصة نسبياً لـ X، فإن

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \qquad (٢٢)$$

لبعض الخيارات من العديد من الأدلة المنتهية $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. بما أن $K \subset Y$، فإن (٢٢) تدل على أن

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \quad . \qquad (٢٣)$$

إن هذا يبرهن على أن K متراصة نسبياً لـ Y.

وبالعكس، لنفترض أن K متراصة نسبياً لـ Y، لتكن $\{G_\alpha\}$ طائفة المجموعات الجزئية المفتوحة لـ X التي تغطي K، ونضع $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$. عندها فإن (٢٣) سوف تتحقق لبعض الخيارات من $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$؛ وبما أن $V_\alpha \subset G_\alpha$، فإن (٢٣) تدل على (٢٢). أن هذا يكمل البرهان.

٢، ٣٤ مبرهنة: *المجموعات الجزئية المتراصة للفضاءآت المترية تكون مغلقة.*

البرهان: لتكن K مجموعة جزئيه متراصة للفضاء المتري X. سوف نبرهن على أن المتمم لـ K يكون مجموعة جزئية مفتوحة لـ X.

لنفترض أن $p \notin K, p \in X$. إذا كانت $q \in K$، ليكن V_q و W_q جوارين لـ p و q ، على التوالي، وبنصف قطر اقل من $\frac{1}{2}d(p,q)$ [لاحظ التعريف ٢، ١٨(أ)] بما أن K متراصة، يوجد هنالك عدد منتهي من النقاط $q_1,\ldots,q_n$ في K بحيث

$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W$.

إذا كانت $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$، فإن يكون جوار لـ p والذي لا يقاطع W . إذن $V \subset K^c$، ولذلك فإن p تكون نقطة داخليه لـ K^c وهذا يبرهن المبرهنة.

٢، ٣٥مبرهنة: *المجموعات الجزئية المغلقة للمجموعات المتراصة تكون متراصة.*

البرهان: نفترض أن $F \subset K \subset X$، F مغلقة (نسبياً لـ X)، و K متراصة. لتكن $\{V_\alpha\}$ غطاءً مفتوحاً لـ F. إذا كانت F^c محاذية adjoined لـ $\{V_\alpha\}$، فإننا نحصل على غطاء مفتوح Ω لـ K. بما أن K متراصة، يوجد هنالك طائفة جزئيه منتهية Φ finite subcollection لـ Ω التي تغطي K، ومن ثم F. إذا كانت F^c عنصراً في Φ، فإننا نستطيع إخراجها من Φ ونبقى محافظين على غطاء مفتوح لـ F. وبهذا فإننا نكون قد بينا أن الطائفة الجزئية المنتهية لـ $\{V_\alpha\}$ تغطي F.

نتيجة: *إذا كانت F مغلقة و K متراصة، فإن $F\cap K$ متراصة.*

البرهان: تبين المبرهنتان ٢، ٢٤(ب) و ٢، ٣٤بان $F\cap K$ مغلقة ؛ بما أن $F\cap K\subset K$، فان المبرهنة ٢، ٣٥ تبين بأن $F\cap K$ متراصة.

٢، ٣٦مبرهنة: *إذا كانت $\{K_\alpha\}$ طائفة لمجموعات جزئيه متراصة للفضاء المتري X بحيث أن التقاطع لكل طائفة جزئيه منتهية لـ $\{K_\alpha\}$ غير خالية، فإن $\bigcap K_\alpha$ يكون غير خالي.*

البرهان: نحدد K_1 كأحد أعضاء $\{K_\alpha\}$ ونضع $G_\alpha = K_\alpha^c$. نفترض انه لا توجد نقطة لـ K_1 تعود إلى كل K_α. عندها فإن المجموعات G_α تشكل غطاء مفتوحاً لـ K_1 ؛ وبما أن K_1 متراصة، فيوجد هنالك عدد منتهي من الأدلة $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ بحيث $K_1\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}$. ولكن هذا يعني أن

$$K_1\cap K_{\alpha_1}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n}$$

خالية، وهذا يناقض افتراضنا.

نتيجة: *إذا كانت $\{K_n\}$ متتالية لمجموعات متراصة غير خالية بحيث $K_n\supset K_{n+1}$ $(n=1,2,3,\ldots)$، عندها فإن $\bigcap_1^\infty K_n$ غير خالية.*

٢، ٣٧ مبرهنة: *إذا كانت E مجموعة جزئيه لانهائية لمجموعه متراصة K، فإن E تمتلك غاية في K.*

البرهان: إذا لم تكن هنالك أية نقطة في K هي نقطة غاية لـ E، فإن كل $q\in K$ ستمتلك جوار V_q يحتوي على نقطة واحدة من E على الأكثر (بالتحديد، q، إذا كانت $q\in E$). من الواضح أنه لا توجد أية طائفة جزئيه منتهية لـ $\{V_q\}$ تستطيع أن تغطي E ؛ ونفس الشيء يصح على K، لأن $E\subset K$. أن هذا يناقض التراص في K.

٢، ٣٨ مبرهنة: *إذا كانت $\{I_n\}$ متتالية من الفترات (الفواصل) **intervals** في $\mathbb{R}^1$، بحيث $I_n\supset I_{n+1}$ $(n=1,2,3,\ldots)$، فإن $\bigcap_1^\infty I_n$ تكون غير خالية.*

البرهان: إذا كانت $I_n=[a_n,b_n]$، لتكن E المجموعة التي تضم كل a_n. عندها فإن E

تكون غير خالية ومقيدة من الأعلى (من قبل b_1). لتكن x هي أصغر قيمة عظمى لـ sup of E. إذا كان m و n أعداد صحيحه موجبة، فإن

$$a_n \le a_{m+n} \le b_{m+n} \le b_m$$

بحيث $x \le b_m$ لكل m. حيث أنه من الواضح أن $a_m \le x$، فإن $x \in I_m$ لـ $m = 1,2,3,\ldots$.

٢، ٣٩ مبرهنة: *لتكن K عدداً صحيحــاً موجباً. إذا كانت $\{I_n\}$ متتالية للخلايا k – بحيث $I_n \supset I_{n+1}$ (n=1,2,3, . . .)، عندها فإن $\bigcap_1^\infty I_n$ غير خالية.*

البرهان: لتكن I_n تتألف من جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ بحيث

$$a_{n,j} \le x_j \le b_{n,j} \quad (1 \le j \le k \;\; ; \; n = 1,2,3,\ldots),$$

نضع $I_{n,j} = \left[a_{n,j}, b_{n,j}\right]$. لكل j ، تحقق المتتالية $\left\{I_{n,j}\right\}$ فرضيات المبرهنة٢، ٣٨. إذن يوجد هنالك أعدادا حقيقية $(1 \le j \le k)$ x^*_j بحيث

$$(n = 1,2,3,\ldots \;\; ; 1 \le j \le k) \qquad a_{n,j} \le x_j^* \le b_{n,j} \; .$$

بوضع $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$، نلاحظ بأن $\mathbf{x}^* \in I_n$ لـ $n = 1,2,3,\ldots$ وهذا يبرهن المبرهنة.

٢، ٤٠ مبرهنة: *كل خليه – k تكون متراصة.*

البرهان: لتكن I الخلية -k، التي تتألف من جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ بحيث $a_j \le x_j \le b_j \quad 1 \le j \le k)$. نضع

$$\delta = \left\{ \sum_1^k (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}$$

عندها فإن $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le \delta$، إذا كانت $\mathbf{x} \in I, \;\; \mathbf{y} \in I$.

ولكي نتوصل إلى تناقض، نفترض، أن هنالك غطاءاً مفتوحاً $\{G_\alpha\}$ لـ I لا يحتوي على غطاء جزئي منتهى لـ I. نضع $c_j = (a_j + b_j)/2$. عندها فإن الفترتين $\left[a_j, c_j\right]$ ، $\left[c_j, b_j\right]$ تحددان Q_i من الخلايا-k عددها 2^k و التي اتحادها I. على الأقل واحد من هذه المجموعات Q_i، لنسميه I_1، لا يمكن تغطيته بأي مجموعة جزئيه منتهية لـ $\{G_\alpha\}$ (وإلا فإن I يمكن تغطيتها بهذه الطريقة). بعد ذلك نقوم بتجزئة I_1 ونكمل الخطوات.

سوف نحصل على متتالية $\{I_n\}$ تمتلك الخواص الآتية :

(أ) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ ؛

(ب) لا تغطى I_n بأي مجموعة جزئيه منتهية لـ $\{G_\alpha\}$ ؛

(ج) إذا كانت $\mathbf{x} \in I_n$ و $\mathbf{y} \in I_n$ ، فإن $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \le 2^{-n}\delta$.

استناداً إلى (أ) والمبرهنة ٢، ٣٩، هنالك نقطة $\mathbf{x}^*$ تقع في كل I_n. لبعض α ، $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. بما أن G_α مفتوحة، هنالك $r > 0$ بحيث $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r$ يؤدي إلى أن $\mathbf{y} \in G_\alpha$. إذا كانت n كبيره لدرجه أن $2^{-n}\delta < r$ (يوجد هنالك مثل هذه الـ n، خلاف ذلك يؤدي إلى أن $2^n \le \delta / r$ لجميع الأعداد الصحيحة n، والتي لا قيمة لها لأن R ارخميديسي)، عندها فإن (ج) تؤدي إلى أن $I_n \subset G_\alpha$، الأمر الذي يناقض (ب). وهذا يكمل البرهان.

إن المكافئ لـ (أ) و(ب) في المبرهنة القادمة يعرف بنظرية هيني- بوريل (**Heine- Borel**).

٢، ٤١ مبرهنة: *إذا امتلكت المجموعة E في R^k لأحد الخواص الثلاثة الآتية، فإنها تمتلك الخاصيتين الأخريين:*

(أ) أن تكون E مغلقة ومقيدة.

(ب) أن تكون E متراصة.

(ج) كل مجموعة جزئيه لانهائية لـ E تمتلك نقطة غاية في E.

البرهان: إذا تحققت (أ)، فإن $E \subset I$ لبعض خلية k- I، وتُستنتج (ب) من المبرهنتين ٢، ٤٠ و ٢، ٣٥. المبرهنة ٢، ٣٧ تبين بأن (ب) تؤدي إلى (ج). وبقي علينا أن نبرهن أن (ج) تؤدي إلى (أ).

إذا كانت E غير *مقيدة* فإن E تحتوي على النقاط $\mathbf{x}_n$ بحيث

$$|\mathbf{x}_n| > n \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

إن المجموعة S التي تحتوي على هذه النقاط $\mathbf{x}_n$ هي مجموعة لانهائية ومن الواضح أنها لا تمتلك نقطة غاية في R^k لذلك فهي لا تحتوي شيئاً في E. لذلك فإن (ج) تؤدي إلى أن E تكون *مقيدة*.

إذا لم تكن E مغلقة، فإن هنالك نقطة $\mathbf{x}_0 \in \mathsf{R}^k$ والتي هي نقطة غاية لـ E ولكنها ليست نقطة في E.

لـ $n = 1,2,3, \ldots$، هنالك نقاط $\mathbf{x}_n \in E$ بحيث $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$. لتكن S المجموعة التي

تضم هذه النقاط $\mathbf{x}_n$. عندها فإن S تكون لانهائية (وإلا فإن $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ ستمتلك قيمه موجبة ثابتة، لعدد لانهائي من n)، S تمتلك $\mathbf{x}_0$ كنقطة غاية، ولا تمتلك نقطة غاية أخرى في. R^k لذلك إذا كان $\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$ R^k، فإن

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| \geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$$
$$\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|$$

لجميع n المنتهية ؛ هذا يبين بأن $\mathbf{y}$ ليست نقطة غاية لـــ S (المبرهنة٢، ٢٠).

لذلك فإن S لا تمتلك نقطة غاية في E ؛ إذن يجب أن تكون E مغلقة إذا تحقق (ج).

يجب أن نشير، في هذه المرحلة، إلى أن (ب) و(ج) متكافئين في أي فضاء متري (التمرين ٢٦) وبأن (أ) لا تؤدي، بصورة عامة، إلى (ب)و(ج). الأمثلة على ذلك متوفرة في التمرين ١٦ والفضاء ℓ^2 ، الذي ستتم مناقشته في الفصل ١١.

٢،٤٢ مبرهنة (ويرستراس) Weierstrass: *كل مجموعة جزئية غير نهائية مقيدة في R^k تمتلك نقطة غاية في R^k.*

البرهان: لكونها *مقيدة*، فإن المجموعة E موضوعة البحث هي مجموعة جزئيه من الخلية – k $I \subset \mathsf{R}^k$. استنادا إلى المبرهنة ٢، ٤٠، فإن I متراصة ولذلك فإن E تمتلك نقطة غاية في I، استنادا إلى المبرهنة ٢، ٣٧.

المجموعات التامة Perfect Sets

٢، ٤٣ مبرهنة: *لتكن P مجموعة تامة غير خالية في R^k. عندها فإن P تكون غير قابلة للعد.*

البرهان: بما أن P تمتلك نقاط غاية، فإنها يجب أن تكون لانهائية. لنفترض أن P قابله للعد، ونرمز إلى نقاط P بـــ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$. سوف نقوم بتشكيل متتالية $\{V_n\}$ من الجوار، كالآتي.

لتكن V_1 أي جوار لـــ $\mathbf{x}_1$. إذا كانت V_1 تتألف من جميع $y \in \mathsf{R}^k$ بحيث $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| < r$، فإن الانغلاق $\overline{V_1}$ لـــ V_1 هو المجموعة التي تضم جميع $y \in \mathsf{R}^k$ بحيث $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| \leq r$.

نفترض أنه قد تم تشكيل V_n، بحيث $V_n \cap P$ غير خالية. بما أن كل نقطة من نقاط P

هي نقطة غاية لـــ P، فإنه يوجد هنالك جوار V_{n+1} بحيث (i) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$، (ii) $\mathbf{x}_n \notin \overline{V}_{n+1}$، (iii) $V_{n+1} \cap P$ غير خالية. إستادا إلى (i ii)، فإن V_{n+1} تُحقق فرضياتنا للاستقراء، حيث بإمكاننا الاستمرار بالتشكيل.

نضع $K_n = \overline{V}_n \cap P$. بما أن $\overline{V}_n$ مغلقة ومقيدة، فإن $\overline{V}_n$ تكون متراصة. بما أن $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$، فلا توجد هنالك نقطة في P تقع في $\bigcap_1^\infty K_n$. بما أن $K_n \subset P$، فإن هذا يعني بأن $\bigcap_1^\infty K_n$ خالية. ولكن كل K_n هي غير خالية، استنادا إلى (iiii)، و $K_n \supset K_{n+1}$، استنادا إلى (i) ؛ وهذا يناقض نتيجة المبرهنة ٢، ٣٦.

نتيجة: *كل فتره $[a , b]$ $(a < b)$ تكون غير قابلة للعد. وعلى وجه الخصوص، فإن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية هي غير قابلة للعد.*

٢، ٤٤ المجموعة كانتور The Cantor set: تبين المجموعة التي سنقدمها الآن أنه يوجد هنالك مجموعات تامة في R^1 لا تحتوي على أية قطعة.

لتكن E_0 الفترة $[0 , 1]$. ننتزع القطعة $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$، ولتكن E_1 الاتحاد للفترتين

$$\left[0,\frac{1}{3}\right] \left[\frac{2}{3},1\right] .$$

ننتزع الأثلاث المتوسطة من هذين الفترتين، ولتكن E_2 الاتحاد للفترات

$$\left[0,\frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9},1\right] .$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة، فإننا نحصل على متتالية من المجموعات المتراصة E_n، بحيث

(أ) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ ؛

(ب) E_n هو الاتحاد لـــ 2^n من الفترات، طول كل واحدة منها 3^{-n}.

تسمى المجموعة

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

مجموعة *كانتور cantor set*. من الواضح أن P تكون متراصة، وتبين المبرهنة ٢، ٣٦ أن P ليست خالية.

لا تمتلك أي قطعه على شكل

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \qquad (٢٤)$$

نقاط مشتركة مع P، حيث k و m أعداد صحيحه موجبة. بما أن كل قطعه $(\alpha\,,\,\beta)$ تحتوي على قطعه على شكل (٢٤)، إذا كان

$$3^{-m} < \frac{\beta-\alpha}{6},$$

فإن P لا تحتوي على أي قطعة.

ولكي نبين أن P تامة، يكفي بأن نبين أن P لا تحتوي على نقطة منعزلة. لتكن $x \in P$، ولتكن S أي قطعه تحتوي على x. لتكن I_n الفترة لـــ E_n التي تحتوي على x نختار n بحيث يكون كبير بما فيه الكفاية، ليكون $I_n \subset S$. لتكن x_n النقطة النهائية لـــ endpoint of I_n بحيث، $x_n \neq x$.

ينتج عن بناء P هذا أن $x_n \in P$. إذن x هي نقطة غاية لـــ P، و P تامة.

إن واحدة من اكثر الخواص أهميه لمجموعة كانتور هي إنها تقدم لنا مثالاً على مجموعة غير قابله للعد بقياس صفري measure zero (سوف نناقش مفهوم القياس في الفصل الحادي عشر).

المجموعات المترابطة Connected Sets

٢، ٤٥ تعريف: يقال للمجموعتين الجزئيتين A و B للفضاء المتري X بأنهما *متباعدتان separated* إذا كان كل من $\overline{A}\cap B \,\&\, A\cap\overline{B}$ خالية. بكلمة أخرى، إذا لم تكن هنالك أية نقطة من A تقع في انغلاق B وأية نقطة من B تقع في انغلاق A.

يقال للمجموعة $E \subset X$ بأنها *مترابطة connected* إذا لم تكن E اتحاداً لمجموعتين متباعدتين غير خاليتين.

٢، ٤٦ ملاحظة: من الطبيعي أن المجموعات المتباعدة منفصلة، ولكن ليس بالضرورة أن تكون المجاميع المنفصلة متباعدة. على سبيل المثال، فإن الفترة [0 , 1] و القطعة (1 , 2) ليسا متباعدتين، حيث أن 1 هو نقطة غاية لـــ (1 , 2). ولكن القطعتين (0 , 1) و (1 ,2) متباعدان.

المجموعات المترابطة للخط المستقيم تمتلك تركيبة بسيطة خاصة بها :

٢، ٤٧ مبرهنة: *تكون المجموعة الجزئية E للخط الحقيقي $\mathbb{R}^1$ مترابطة إذا وإذا فقط كانت تمتلك الخاصية الآتية : إذا كانت* $x \in E$, $y \in E$ و $x < z < y$ فإن $z \in E$

البرهان: إذا كان هنالك $x \in E, y \in E$، ولبعض $z \in (x,y)$ بحيث $z \notin E$، فإن $E = A_z \cup B_z$ حيث

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \qquad B_z = E \cap (z, \infty) .$$

بما أن $x \in A_z$ و $y \in B_z$، A و B غير خاليتين. بما أن $A_z \subset (-\infty, z)$ و $B_z \subset (z, \infty)$، فإنهما متباعدتان، أذن فإن E ليست مترابطة.

ولكي نبرهن العكس، نفترض أن E ليست مترابطة. عندها يوجد هنالك مجموعتين متباعدتين غير خاليتين A و B بحيث $A \cup B = E$. نختار $x \in A, y \in B$، ونفترض أن (بدون أي خسارة في العمومية) $x < y$. نعرف

$$z = \sup(A \cap [x, y]) .$$

استناداً للمبرهنة ٢، ٢٨فإن $z \in \overline{A}$; حيث $z \notin B$. وعلى وجه الخصوص، $x \le z < y$.

إذا كانت $z \notin A$، فإن ذلك يؤدي إلى أن $x < z < y$ وان $z \notin E$.

إذا كان $z \in A$ ، فإن $z \notin \overline{B}$، إذن يوجد هنالك z_1 بحيث $z < z_1 < y$ و $z_1 \notin B$.

عندها فإن $x < z_1 < y$ و $z_1 \notin E$.

تمارين EXERCISES

١- برهن على أن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئيه لكل مجموعة.

٢- يقال للعدد العقدي z بأنه جبري ***algebraic*** إذا كان هنالك أعداد صحيحه $a_0,\ldots,a_n$، ليست جميعها صفراً، بحيث

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \ .$$

برهن على أن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الجبرية تكون قابله للعد. *تلميح* : لكل عدد صحيح موجب N هنالك عدد منتهى فقط من المعادلات بحيث

$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N \ .$$

٣- برهن على أنه يوجد أعداد حقيقية ليست جبرية.

٤- هل أن المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية الغير نسبيه، قابله للعد ؟

٥- كون مجموعة مقيدة من الأعداد الحقيقية تمتلك ثلاث نقاط غاية فقط.

٦- لتكن E' المجموعة التي تضم جميع نقاط الغاية بمجموعه E. برهن على أن E' مغلقة. برهن على أن E و $\overline{E}$ تمتلكان نفس نقاط الغاية. (تذكر أن $\overline{E} = E \cup E'$). هل أن E و E' تمتلكان دائماً نفس نقاط الغاية ؟

٧- لتكن $A_1, A_2, A_3, \ldots$ مجاميع جزئية من الفضاء المتري.

(أ) إذا كانت $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$، برهن على أن $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$، لـ $n = 1,2,3,\ldots$.

(ب) إذا كانت $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$، برهن على أن $\overline{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$. بَين، بمثال، على أن هذا التضمين ممكن أن يكون تاماً.

٨- هل أن كل نقطة لكل مجموعة مفتوحة $E \subset \mathbf{R}^2$ هي نقطة غاية لـ E ؟ أجب على نفس السؤال بالنسبة للمجموعات المغلقة في $\mathbf{R}^2$.

٩- لتكن E^0 ترمز إلى المجموعة التي تضم جميع النقاط الداخلية للمجموعة E. [راجع التعريف ٢، ١٨ (هـ) ؛ E^0 تسمى *الجزء الداخلي* لـ *interior of E*].

(أ) برهن على أن E^0 تكن مفتوحة دائماً.

(ب) برهن على أن E تكون مفتوحة دائماً إذا وإذا فقط كانت $E^0 = E$.

(ج) إذا كانت $G \subset E$ و G مفتوحة، برهن على أن $G \subset E^0$.

(ء) برهن على أن المتمم لـ E^0 هو الانغلاق لمتمم E.

(هـ) هل تمتلك E و $\overline{E}$ دائماً نفس الأجزاء الداخلية؟

(و) هل تمتلك E و E^0 دائماً نفس الانغلاقات؟

١٠- لتكن X مجموعة لانهائية. بالنسبة لـ $p \in X$ و $q \in X$، عرف

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & (\text{إذا كانت } p \neq q) \\ 0 & (\text{إذا كانت } p = q) \end{cases}$$

برهن على أن هذا مترياً. أياً من المجموعات الجزئية الناتجة من الفضاء المتري مفتوحة ؟ أيا منها مغلقة ؟ أيا منها متراصة ؟

١١- إذا كانت $x \in \mathbf{R}^1$ و $y \in \mathbf{R}^1$، نعرف

$$d_1(x,y) = (x-y)^2,$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|},$$
$$d_3 = |x^2 - y^2|,$$
$$d_4 = |x - 2y|,$$
$$d_5 = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

بين، فيما إذا كان أي من هؤلاء، مترياً أم لا.

١٢- لتكن $K \subset \mathbf{R}^1$ تتألف من 0 والأعداد $1/n$، لـ $n = 1,2,3,\ldots$. برهن على أن K متراصة من التعريف مباشرة. (بدون استخدام نظرية هييني -بوريل).

١٣- كون مجموعة متراصة للأعداد الحقيقية التي تكّون نقاط الغاية فيها مجموعة قابله للعد.

١٤- قدم مثالاً للقطعة $(0,1)$ غطاءها المفتوح لا يمتلك غطاءاً جزئياً منتهياً.

١٥- بين أن المبرهنة ٢، ٣٦ ونتيجتها تصبح غير صحيحة (في $\mathbf{R}^1$، على سبيل المثال) إذا استبدلت عبارة "متراصة" بعبارة "مغلقة" أو بـ "مقيدة".

١٦- اعتبر $\mathbf{Q}$ المجموعة التي تضم جميع الأعداد النسبية، فضاءاً مترياً، بحيث $d(p,q) = |p-q|$. لتكن E المجموعة التي تضم جميع النقاط $p \in \mathbf{Q}$. بحيث $2 < p^2 < 3$. بين أن E مغلقة ومقيدة في $\mathbf{Q}$، ولكنها ليست متراصة. هل أن E مفتوحة في $\mathbf{Q}$ ؟

١٧- لتكن E المجموعة التي تضم جميع $x \in [0,1]$ والتي مفكوكها العشري يحتوي على الأرقام ٤و٧ فقط. هل أن E قابله للعد ؟ هل أن E كثيفة في $[0,1]$ ؟ هل أن E متراصة ؟ هل أن E تامة ؟.

١٨- هل توجد مجموعة تامة غير خالية في R^1 لا تحتوي على أي عدد نسبي ؟.

١٩- (أ) إذا كانت A و B مجموعتين مغلقتين منفصلتين في بعض الفضاء المتري X، برهن على انهما متباعدتان.

(ب) برهن الشيء نفسه بالنسبة لمجموعتين مفتوحتين منفصلتين.

(ج) حدد $\delta > 0, p \in X$، عرفت A لتكون المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < \delta$، عرفت B بنفس الطريقة، بوضع $<$ بدلاً من $>$. برهن على A وB متباعدتان.

(د) برهن على أن كل فضاء متري مترابط يحتوي على نقطتين على الأقل غير قابله للعد. تلميح : استخدم (ج).

٢٠- هل أن الانغلاقات ومجموعة النقاط الداخلية للمجموعات المترابطة، مترابطة دائماً ؟ (ركز على المجموعات الجزئية لـــ R^2).

٢١- لتكن A وB مجموعات جزئيه متباعدة لبعض R^k، افترض أن $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B$، وعرف

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

بالنسبة لـــ $t \in R^1$. ضع $A_0 = \mathbf{p}^{-1}(A)$, $B_0 = \mathbf{p}^{-1}(B)$. [لذلك فإن $t \in A_0$ إذا وإذا فقط كانت $\mathbf{p}(t) \in A$].

(أ) برهن على أن A_0 و B_0 تكونان مجموعتين جزئيتين متباعدتين لـــ R^1.

(ب) برهن على انه يوجد هنالك $t_0 \in (0,1)$. بحيث $\mathbf{p}(t_0) \notin A \cup B$

(ج) برهن على أن كل مجموعة جزئيه محدبة لـــ R^k تكون مترابطة.

٢٢- يسمى الفضاء المتري *قابل للانفصال* *separable* إذا كان يحتوي على مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد. بين أن R^k يكون قابل للانفصال. *تلميح* : لاحظ مجموعة النقاط التي تمتلك إحداثيات نسبيه فقط.

٢٣- تسمى *الطائفة* *collection* $\{V_\alpha\}$ للمجموعات الجزئية المفتوحة لـــ X، *أساساً* لـــ X *base of* اذا صح ما يلي: لكل $x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة $G \subset X$ بحيث

$x \in G$ فإن $x \in V_\alpha \subset G$ لبعض α. بكلمة أخرى، أن كل مجموعة مفتوحة في X هي الاتحاد *لطائفه جزئيه* لـــ $\{V_\alpha\}$ ***subcollection of***.

برهن على أن كل فضاء متري قابل للانفصال يمتلك أساسا قابلاً للعد ***countable*** **base**. *تلميح* : خذ جميع الجوارات التي أنصاف أقطارها أعداد نسبيه ومركزها في بعض المجموعات الجزئية الكثيفة لــ X.

٢٤- لتكن X فضاءاً مترياً تمتلك فيها كل مجموعة جزئيه لانهائية نقطة غاية. برهن على أن X قابل للانفصال. تلميح: حدد $\delta > 0$، واختار $x_1 \in X$. بعد أن تختار $x_1, \ldots, x_j \in X$، اختار $x_{j+1} \in X$، إذا كان ممكناً، بحيث $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$ بالنسبة لـــ $i = 1, \ldots, j$. بين أن هذه الخطوات يجب أن تتوقف بعد عدد محدد من الخطوات، و لذلك فإن بالإمكان تغطية X بعدد منتهي من الجوارات يكون نصف قطرها δ. خذ $\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، ولاحظ مراكز الجوارات المماثلة.

٢٥- برهن على أن كل فضاء متري متراص K يمتلك أساساً قابل للعد، وبأن K تبعاً لذلك يكون قابل للانفصال. *تلميح* : لكل عدد صحيح موجب n، يوجد هنالك العديد من الجوارات المحددة بنصف قطر $1/n$ والتي يغطي اتحادها K.

٢٦- لتكن X فضاءاً مترياً تمتلك فيه كل مجموعة جزئيه لانهائية نقطة غاية. برهن على أن X متراصة. *تلميح* : استناداً إلى التمرينين ٢٣و٢٤، فإن X تمتلك أساسا قابلاً للعد. يؤدي ذلك إلى انه كل غطاء مفتوح لـــ X يمتلك غطاء جزئي قابلا للعد ***countable*** **subcover** $\{G_n\}$، $n = 1, 2, 3,$. إذا لم يكن هنالك عدد منتهي من الطوائف الجزئية لـــ $\{G_n\}$ تغطي X، فإن المتمم F_n لـــ $G_1 \cup \cdots \cup G_n$ يكون غير خالي لكل n، ولكن $\bigcap F_n$ يكون خالي. إذا كانت E مجموعة تحتوي على نقطة من كل F_n، لاحظ نقطة الغاية لـــ E، ونصل إلى تناقض.

٢٧- حدد النقطة p في الفضاء المتري X لتكون *نقطة مركزة* ***condensation point*** للمجموعة $E \subset X$ إذا كان كل جوار لـــ p يحتوي على عدة نقاط من E غير قابلة للعـــد.

افترض أن $E \subset R^k$، E قابله للعد، ولتكن المجموعة P التي تضم جميع النقاط المركزة

لـ E. برهن على أن P تكون تامة وبأنه على الأكثر هنالك العديد من النقاط القابلة للعد من E لا تقع في P. بكلمة أخرى، بين أن $P^c \cap E$ تكون قابله للعد على الأكثر.

تلميح : لتكن $\{V_n\}$ أساسا قابلاً للعد لـ $\mathbf{R}^k$، لتكن W اتحاد الـ V_n التي يكون فيها $E \cap V_n$ على الأكثر قابلاً للعد، وبين أن $P = W^c$.

٢٨- برهن على أن كل مجموعة مغلقة في فضاء متري متباعد تكون الاتحاد لمجموعه تامة (من الجائز أن تكون فارغة) مع مجموعة قابله للعد على الأكثر. (نتيجة: كل مجموعة مغلقة قابله للعد في $\mathbf{R}^1$ تمتلك نقاطاً منعزلة).

تلميح : استخدم التمرين ٢٧.

٢٩- برهن على أن كل مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^1$ تكون الاتحاد لمجموعه من القطع المنفصلة القابلة للعد على الأكثر. تلميح : استخدم التمرين ٢٢.

٣٠- قلد برهان المبرهنة ٤٣،٢ للحصول على النتيجة الآتية :

إذا كانت $\mathbf{R}^k = \bigcup_1^\infty F_n$، حيث أن كل F_n هي مجموعة جزئيه مغلقة لـ $\mathbf{R}^k$، فإن هنالك على الأقل F_n واحدة تمتلك جزءاً داخلياً غير خالي.

عبارة مماثلة :

إذا كانت G_n مجموعة جزئيه مفتوحة مركزة لـ $\mathbf{R}^k$، بالنسبة لـ n =1,2,3, . . . ، فإن $\bigcap_1^\infty G_n$ لا يكون خالياً (في الحقيقة، انه كثيف في $\mathbf{R}^k$).

(أن هذا يعتبر حاله خاصة من مبرهنة باير ؛ راجع التمرين ٢٢، الفصل الثالث بالنسبة للحالة العامة)

الفصل الثالث

المتتاليات والمتسلسلات العددية

- المتتاليات المتقاربة
- اللواحق (المتتاليات الجزئية)
- متتاليات كوشي
- الغايات العليا والسفلى
- بعض المتتاليات (المتتابعات) الخاصة
- المتسلسلات
- متسلسلات الحدود الغير سالبة
- العدد e
- الاختبارين الجذري والنسبي
- متسلسلات القوى
- الجمع بالتجزئة (الأجزاء)
- التقارب المطلق
- جمع وضرب المتسلسلات
- إعادة الترتيب
- تمارين

الفصل الثالث
المتتاليات والمتسلسلات العددية
Numerical Sequences And Series

كما يشير العنوان، فإن هذا الفصل يتناول بصورة رئيسية المتتاليات والمتسلسلات للأعداد العقدية. ويتناول الفصل أيضاً الحقائق الأساسية حول التقارب، التي يتم شرحها بـإطار أكثر عمومية. لذلك فإن البنود الثلاثة الأولى من الفصل ستتناول في الفضاءآت الإقليدية، أو حتى في الفضاءآت المترية.

المتتاليات المتقاربة Convergent Sequences

٣، ١ تعريف: يقال للمتتالية $\{p_n\}$ في الفضاء المتري X بأنها تتقارب **converge** إذا كانت هنالك نقطه $p \in X$ تمتلك الخاصية الآتية: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \varepsilon$. (d هنا ترمز إلى المسافة في X).

في هذه الحالة نقول أيضاً أن $\{p_n\}$ تتقارب إلى p، أو أن p هي الغاية لـ $\{p_n\}$ [راجع المبرهنة ٣، ٢ (ب)]، ونكتب أن $p_n \to p$، أو

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \ .$$

يقال لـ $\{p_n\}$ بأنها *تتباعد* ***diverge***، إذا كانت لا تتقارب.

من المفيد أن نشير هنا إلى أن تعريفنا للـ "متتاليات المتقاربة" "***convergent sequence***" لا يعتمد فقط على $\{p_n\}$ ولكن أيضاً على X ؛على سبيل المثال، المتتالية $\{1/n\}$ متقاربة في R^1 (إلى 0)، لكن التقارب أخفق في المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية الموجبة [حيث $d(x,y) = |x-y|$]. في الحالة التي قد يكتنفها بعض الغموض، بـإمكاننا أن نكون أكثر دقة بتعريف " التقارب في X " بدلاً من "التقارب".

نستذكر هنا بأن المجموعة التي تضم جميع النقاط p_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ هي المدى ***range*** لـ $\{p_n\}$. من الممكن أن يكون مدى المتتالية مجموعة منتهية، أو غير منتهية. يقال للمتتالية $\{p_n\}$ بأنها *مقيدة (محدده)* ***bounded*** إذا كان مداها مقيد.

وكأمثلة، لاحظ المتتاليات الآتية للأعداد العقدية ($X = R^2$):

(أ) إذا كانت $s_n = 1/n$, فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ ؛ ويكون المدى لانهائي، والمتتالية مقيدة.

(ب) إذا كانت $s_n = n^2$ ، فإن المتتالية $\{s_n\}$ غير مقيدة، وتكون متباعدة (غير متقاربة)، وتمتلك مدى لانهائي.

(ج) إذا كانت $s_n = 1 + [(-1)^n / n]$ ، فإن المتتالية $\{s_n\}$ تتقارب لـ 1، وتكون مقيدة، وتمتلك مدى لانهائي.

(د) إذا كانت $s_n = i^n$ ، فإن المتتالية $\{s_n\}$ غير متقاربة (متباعدة)، مقيدة، وتمتلك مدى منتهي.

(هـ) إذا كانت $s_n = 1$ $(n = 1,2,3,\ldots)$، فإن $\{s_n\}$ تتقارب لـ 1، مقيدة، وتمتلك مدى منتهي.

نلخص الآن بعض الخواص الرئيسية للمتتالية المتقاربة في الفضاءآت المترية.

٣، ٢ مبرهنة:

لتكن $\{p_n\}$ متتالية في الفضاء متري X.

(أ) تتقارب $\{p_n\}$ إلى $p \in X$ إذا وإذا فقط كان كل جوار لـ p يحتوي على كل النقاط ما عدا عدد منتهي من حدود $\{p_n\}$.

(ب) إذا كانت $p \in X$، $p' \in X$، وكانت $\{p_n\}$ تتقارب إلى p وإلى p'، فإن $p' = p$.

(ج) إذا كانت $\{p_n\}$ تتقارب، فــإنها تكون مقيدة.

(د) إذا كانت $E \subset X$ وكانت p *نقطة غاية لـ E، عندها يوجد هنالك متتالية $\{p_n\}$ في E بحيث $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.*

البرهان: (أ) لنفترض أن $p_n \to p$ ولتكن V جوار لـ p. لبعض $\varepsilon > 0$، فإن الشرطين $d(q,p) < \varepsilon$, $q \in X$ يؤديان إلى $q \in V$. وبخصوص هذه الـ ε، يوجد هنالك N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \varepsilon$. لذلك فإن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $p_n \in V$.

وبالعكس، لنفترض أن كل جوار لـ p يحتوي على كل النقاط ماعدا عدد منتهي من الـ p_n. ضع $\varepsilon > 0$، ولتكن V المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < \varepsilon$. حسب

الافتراض، يوجد هنالك N (متعلقة بهذه الـــ V) بحيث $p_n \in V$ إذا كانت $n \geq N$. لذلك فإن $d(p_n, p) < \varepsilon$ إذا كانت $n \geq N$ ؛ إذن $p_n \to p$.

(ب) لنفترض أن $\varepsilon > 0$. يوجد هنالك عددين صحيحين N , N' بحيث

$$n \geq N \ , \quad \text{يؤدي إلى أن} \quad d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq N' \ . \quad \text{يؤدي إلى أن} \quad d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}$$

إذن، إذا كانت $n \geq \max(N, N')$، فإن

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon \ .$$

بما أن ε كانت عشوائية، فإننا نستنتج بأن $d(p, p') = 0$.

(ج) لنفترض أن $p_n \to p$. يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث $n > N$ يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < 1$. نضع

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_n, p)\} \ .$$

عندها فإن $d(p_n, p) \leq r$ بالنسبة لـــ $n = 1,2,3,\ldots$.

(د) لكل عدد صحيح موجب n، يوجد هنالك نقطة $p_n \in E$ بحيث $d(p_n, p) < 1/n$. وإذا أخذنا $\varepsilon > 0$، نختار N بحيث $N\varepsilon > 1$. إذا كانـــت $n > N$، فإن ذلك يؤدي إلى أن $d(p_n, p) < \varepsilon$. إذن $p_n \to p$.

وبذلك يكون البرهان قد انتهى.

بالنسبة للمتتاليات في $\mathbb{R}^k$، نستطيع أن ندرس العلاقة بين التقارب، من جهة، والعمليات الجبرية من جهة أخرى. ندرس أولا متتاليات الأعداد العقدية.

٣، ٣ مبرهنة: *لنفترض أن* $\{s_n\}$،$\{t_n\}$ *هما متتاليتان مركبتان* ***complex sequences***، *وان* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$، $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. *عندها فإن*

(أ) $\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$ ؛

(ب) $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$، $\lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$، لأي عدد c ؛

(ج) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$ ؛

(د) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$، شريطة أن تكون $s_n \neq 0$ ، $(n = 1,2,3,\ldots)$ ، و $s \neq 0$.

البرهان : (أ) لنفترض أن $0 < \varepsilon$، يوجد هنالك عددين صحيحين N_2, N_1 بحيث

$n \geq N_1$ يؤدي إلى أن $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$،

$n \geq N_2$ يؤدي إلى أن $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$.

إذا كانت $N = \max(N_1, N_2)$ ، فإن $n \geq N$ تؤدي إلى

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon \ .$$

وهذا يبرهن (أ). برهان (ب) بسيط جداً.

(ج) نستعمل المتطابقة الآتية

$$s_n\, t_n - s\, t = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s) \ . \qquad (١)$$

وإذا افترضنا أن $0 < \varepsilon$، يوجد هنالك عددان صحيحان N_2،N_1 بحيث

$n \geq N_1$ يؤدي إلى أن $|s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$،

$n \geq N_2$ يؤدي إلى أن $|t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}$.

وإذا أخذنا $N = \max(N_1, N_2)$ ، فإن $n \geq N$ يؤدي إلى أن

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon ،$$

بحيث

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0 \ .$$

نطبق الآن (أ) و(ب) على (١)، لنستنتج بأن

$$\lim_{n\to\infty} (s_n\, t_n - s\, t) = 0 \ .$$

(د) نختار m بحيث $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$. إذا كانت $n \geq m$، نلاحظ أن

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \qquad (n \geq m)$$

وإذا أخذنا $0 < \varepsilon$، يوجد هنالك عدد صحيح $N > m$ بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2 \varepsilon \ .$$

إذن، بالنسبة لـ $n \geq N$،

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon \ .$$

٣، ٤ مبرهنة : (أ) *نفترض أن* $\mathbf{x}_n \in \mathsf{R}^k$ $(n=1,2,3,\dots)$ و

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n},\dots,\alpha_{k,n}) .$$

عندها فإن $\{\mathbf{x}_n\}$ *تتقارب إلى* $\mathbf{x} = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ *إذا وإذا فقط كانت*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \le j \le k) . \qquad (٢)$$

(ب) *نفترض أن* $\{\mathbf{x}_n\}$ ، $\{\mathbf{y}_n\}$ *متتاليتان في* R^k، $\{\beta_n\}$ *متتالية في الأعداد الحقيقية، و* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\beta_n \to \beta$. *عندها فإن*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y} , \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} , \lim_{n\to\infty} \beta_n \mathbf{x}_n = \beta\,\mathbf{x} .$$

البرهان:

(أ) إذا كانت $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$، فإن المتباينات

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \le |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| ,$$

التي تأتي مباشرة من تعريف المعيار في R^k، تبين بأن (٢) تتحقق.

وبالعكس، إذا كانت (٢) تتحقق، فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد بالمقابل عدد صحيح N بحيث أن $n \ge N$ تؤدي إلى أن

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} . \qquad (1 \le j \le k)$$

إذن $n \ge N$ تؤدي إلى أن

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon ,$$

بحيث $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. وهذا يبرهن (أ).

الجزء (ب) ينتج عن (أ) والمبرهنة ٣، ٣.

المتتاليات الجزئية (اللواحق) Subsequences

٣، ٥ تعريف: لنأخذ المتتالية $\{p_n\}$، لاحظ المتتالية $\{n_k\}$ للأعداد الصحيحة الموجبة، بحيث $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. عندها فإن المتتالية $\{p_{n_i}\}$ تسمى *متتالية جزئية* لـــ $\{p_n\}$ *subsequence of* .

إذا كانت $\{p_{n_i}\}$ تتقارب، فإن غايتها تسمى ***غاية المتتالية الجزئية لـ subsequential limit of*** $\{p_n\}$.

من الواضح أن $\{p_n\}$ تتقارب إلى p إذا وإذا فقط كانت كل متتالية جزئية لـ $\{p_n\}$ تتقارب إلى p. نترك تفاصيل البرهان إلى القارئ.

٣، ٦ مبرهنة:

(أ) إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية في الفضاء المتري المتراص X، فإن بعض المتتاليات الجزئية لـ $\{p_n\}$ تتقارب إلى نقطه في X.

(ب) كل متتالية مقيدة في R^k تحتوي على متتالية جزئية متقاربة.

البرهان:

(أ) لتكن E المدى لـ $\{p_n\}$. إذا كانت E منتهية، فيوجد هنالك $p \in E$ ومتتالية $\{n_i\}$ بـ $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$، بحيث

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p \ .$$

من الواضح أن المتتالية الجزئية التي نحصل عليها $\{p_{n_i}\}$ تتقارب إلى p.

إذا كانت E لانهائية، فإن المبرهنة ٢، ٣٧ تبين بأن E تمتلك نقطة غاية $p \in X$. نختار n_1 بحيث $d(p, p_{n_1}) < 1$. بعد أن نختار $n_1, \ldots, n_{i-1}$، نلاحظ من المبرهنة ٢، ٢٠ أن هنالك عدداً صحيحاً $n_i > n_{i-1}$ بحيث $d(p, p_{n_i}) < 1/i$. عندها فإن $\{p_{n_i}\}$ تتقارب إلى p.

(ب) يستنتج ذلك من (أ)، بما أن المبرهنة ٢، ٤١ تؤدي إلى أن كل مجموعة جزئية مقيدة لـ R^k تقع في مجموعة جزئية متراصة R^k.

٣، ٧ مبرهنة: *تشكل الغايات للمتتاليات الجزئية للمتتالية $\{p_n\}$ في الفضاء المتري X مجموعة جزئية مغلقة لـ X.*

البرهان: لتكن E^* المجموعة التي تضم جميع الغايات للمتتاليات الجزئية لـ $\{p_n\}$ ولتكن q نقطة غاية لـ E^*. أن علينا أن نبين أن $q \in E^*$.

نختار n_1 بحيث $p_{n_1} \neq q$. (إذا لم يكن هنالك مثل هذه الـ n_1، فإن E^* تمتلك نقطة واحدة فقط، ولا يوجد شيء لبرهنته). ضع $\delta = d(q, p_{n_1})$. لنفترض انه تم اختيار

$n_1,\dots,n_{i-1}$. بما أن q نقطة غاية لـــ E^*، يوجد هنالك $x \in E^*$ بحيث $d(x,q) < 2^{-i}\delta$.
بما أن $x \in E^*$، يوجد هنالك $n_i > n_{i-1}$ بحيث $d(x, p_{ni}) < 2^{-i}\delta$. لذلك فإن $d(q, p_{ni}) \le 2^{1-i}\delta$ بالنسبة لــ $i = 1,2,3,\dots$. أن هذا يُفيد بأن $\{p_{ni}\}$ تتقارب إلى q.
إذن $q \in E^*$.

متتالية كوشي Cauchy Sequence

٣، ٨ تعريف: يقال للمتتالية $\{p_n\}$ في الفضاء المتري X بأنها متتالية كوشي إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ إذا كانت $n \ge N$ و $m \ge N$.

في مناقشتنا لمتتالية كوشي، أضافه إلى الحالات الأخرى التي ستبرز في مراحل لاحقه، يحمل المفهوم الهندسي الآتي فوائداً جما.

٣، ٩ تعريف: لتكن E مجموعة جزئية لفضاء متري X، ولتكن S المجموعة التي تضم جميع الأعداد الحقيقية التي على شكل $d(p,q)$ ، حيث $p \in E$ و $q \in E$. عندها فإن أصغر قيمة عظمى (sup) لــ S يسمى *القطر* لــ *diameter of E*.

إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية في X وإذا كانت E_N تتألف من النقاط $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \dots$، من الواضح من التعريفين السابقين بأن $\{p_n\}$ تكون متتالية كوشي إذا وإذا فقط كان

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} E_N = 0 .$$

٣، ١٠ مبرهنة:

(أ) إذا كانت $\overline{E}$ الإغلاق للمجموعة E في الفضاء المتري X، فإن

$$\operatorname{diam} \overline{E} = \operatorname{diam} E .$$

(ب) إذا كانت K_n متتالية لمجموعات متراصة في الفضاء المتري X بحيث $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3,\dots)$.

وإذا كان

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$

فإن $\bigcap_1^\infty K_n$ تتألف من نقطه واحدة فقط.

البرهان:

(أ) بما أن $E \subset \overline{E}$، فإنه من الواضح أن

$$\operatorname{diam} E \le \operatorname{diam} \overline{E} .$$

نضع $\varepsilon > 0$، ونختار $p \in \overline{E}$، $q \in \overline{E}$. من تعريف $\overline{E}$، يوجد هنالك نقطتان p'، q'، في E بحيث $d(p,p') < \varepsilon$، $d(q,q') < \varepsilon$. إذن

$$\begin{aligned} d(p,q) &\le d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) \\ &< 2\varepsilon + d(p',q') \le 2\varepsilon + \operatorname{diam} E. \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أن

$$\operatorname{diam} \overline{E} \le 2\varepsilon + \operatorname{diam} E ,$$

وبما أن ε عشوائية، فإن (أ) تكون قد برهنت.

(ب) نضع $K = \bigcap_1^\infty K_n$. استنادا للمبرهنة ٢، ٣٦، فإن K ليست خاليه. إذا كانت K تحتوي على اكثر من نقطه واحدة، عندها فإن $\operatorname{diam} K > 0$. ولكن لكل n، فإن $K \supset K_n$، لذلك فإن $\operatorname{diam} K_n \ge \operatorname{diam} K$. وهذا يناقض الافتراض بأن $\operatorname{diam} K_n \to 0$.

٣، ١١ مبرهنة:

(أ) *في أي فضاء متري X، كل متتالية متقاربة تكون متتالية كوشي.*

(ب) إذا كانت X *فضاءا مترياً متراصا وكانت* $\{p_n\}$ *متتالية كوشي في X، عندها فإن* $\{p_n\}$ *تتقارب إلى نقطه ما لـ X.*

(ج) *في* R^k، *كل متتالية كوشي تتقارب.*

ملاحظة:

أن الفرق بين تعريف الاقتراب وتعريف متتالية كوشي هوان الغاية تستخدم بشكل ظاهر في الأول، ولكن ليس في الثاني. لذلك فإن المبرهنة ٣، ١١ (ب) قد تمكننا من أن نقرر فيما إذا كانت متتالية معينه تتقارب أم لا بدون معرفة الغاية التي قد تتقارب إليها.

أن الحقيقة (المتضمنة في المبرهنة ٣، ١١) القاضية بأن المتتالية تتقارب في R^k إذا وإذا فقط كانت متتالية كوشي يطلق عليها عادة *قاعدة (مقياس) كوشي* *Cauchy criterion* للاقتراب.

البرهان:

(أ) إذا كانت $p_n \to p$ وكانت $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد أ صحيحاً N بحيث $d(p,p_n) < \varepsilon$ لجميع $n \geq N$. إذن

$$d(p_n,p_m) \leq d(p_n,p) + d(p,p_m) < 2\varepsilon$$

طالما $n \geq N$ و $m \geq N$. لذلك $\{p_n\}$ هي متتابعة كوشي.

(ب) لتكن $\{p_n\}$ متتالية كوشي في الفضاء المتراص X. بالنسبة لـ $N = 1,2,3,\ldots$، لتكن E_N المجموعة التي تتألف من $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$ عندها فإن

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}\overline{E}_N = 0, \qquad (٣)$$

استناداً للتعريف ٣، ٩ والمبرهنة ٣، ١٠ (أ). ونظراً لكونها مجموعة جزئية مغلقة في لفضاء المتراص X، فإن كل $\overline{E}_N$ تكون متراصة (المبرهنة ٢، ٣٥). أيضاً $E_N \supset E_{N+1}$، بحيث $\overline{E}_N \supset \overline{E}_{N+1}$.

تبين المبرهنة ٣، ١٠ (ب) الآن بأنه هنالك $p \in X$ وحيده تقع في كل $\overline{E}_N$.

لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى (٣) يوجد هنالك عدداً صحيحاً N_0 بحيث $\operatorname{diam}\overline{E}_N < \varepsilon$ إذا كانت $N \geq N_0$. بما أن $p \in \overline{E}_N$، يؤدي ذلك إلى أن $d(p,q) < \varepsilon$ لكل $q \in \overline{E}_N$، وهذا لكل $q \in E_N$. بكلمة أخرى، فإن $d(p,p_n) < \varepsilon$ إذا كانت $n \geq N_0$. وهذا بالضبط معناه أن $p_n \to p$.

(ج) لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في R^k. نعين E_N كما في (ب)، بوضع $\mathbf{x}_i$ محل p_i. لبعض N، يكون $\operatorname{diam} E_N < 1$. المدى لـ $\{\mathbf{x}_n\}$ هو الاتحاد لـ E_N والمجموعة المنتهية $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{N-1}\}$.

إذن $\{\mathbf{x}_n\}$ مقيدة. بما أن كل مجموعة جزئية مقيدة لـ R^k تمتلك انغلاق متراص في R^k (المبرهنة٢، ٤١)، فإن (ج) تستنتج من (ب).

٣، ١٢ تعريف: يسمى الفضاء المتري الذي تتقارب فيه كل متتالية كوشي بـ *التام* *complete*.

لذلك فإن المبرهنة ٣، ١١ تفيد بأن جميع الفضاءآت المترية المتراصة وجميع الفضاءآت الإقليدية تكون تامة. تدل المبرهنة ٣، ١١أيضا على أن *كل مجموعة جزئية مغلقة E لفضاء متري*

تام X *تكون تامة*. (كل متتالية كوشي في E تكون متتالية كوشي في X، إذن فإنها تتقارب إلى بعض $p \in X$، وفي الحقيقة فإن $p \in E$ لأن E مغلقة). كمثال على الفضاء المتري الغير تام هو الفضاء لجميع الأعداد النسبية، التي تحقق $d(x,y) = |x-y|$.

تبين المبرهنة ٣، ٢ (ج) والمثال (د) للتعريف ٣، ١بأن المتتاليات المتقاربة تكون مقيدة، ولكن ليس بالضرورة أن تتقارب المتتاليات المقيدة في $\mathbf{R}^k$. على الرغم من ذلك، هنالك حاله واحدة مهمة يكون فيها الاقتراب مكافئاً للتقيد **boundedness**: يحدث هذا في المتتاليات المرتبة $\mathbf{R}^1$.

٣، ١٣تعريف: يقال للمتتالية $\{s_n\}$ للأعداد الحقيقية بأنها

(أ) *متزايدة ترتيبياً* ***monotonically increasing*** إذا كان $s_n \le s_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$؛

(ب) *متناقصة ترتيبياً* ***monotonically decreasing*** إذا كان $s_n \ge s_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$.

تتألف طبقه المتتاليات الرتيبة من المتتاليات المتزايدة والمتناقصة.

٣، ١٤مبرهنة: *افترض أن $\{s_n\}$ رتيبة. عندها فإن $\{s_n\}$ تتقارب إذا و إذا فقط كانت مقيدة.*

البرهان: لنفترض أن $s_n \le s_{n+1}$ (يكون البرهان مماثلاً في الحالة الأخرى). لتكن E المدى لـ $\{s_n\}$. إذا كانت $\{s_n\}$ مقيدة، لتكن s القيد العلوي الأصغر لـ E. عندها فإن

$$s_n \le s \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

لكل $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث

$$s - \varepsilon < s_N \le s,$$

لأنه خلاف ذلك ستكون $s-\varepsilon$ قيداً علوياً لـ E. بما أن $\{s_n\}$ متزايدة، $n \ge N$ لذلك يؤدي إلى

$$s - \varepsilon < s_n \le s,$$

التي تبين أن $\{s_n\}$ تتقارب (إلى s).

العكس يأتي من المبرهنة ٣، ٢(ج).

الغايات العليا والسفلى Upper And Lower Limits

٣، ١٥ تعريف: لتكن $\{s_n\}$ متتالية للأعداد الحقيقية وتمتلك الخاصية الآتية: لكل M حقيقة يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $s_n \geq M$. عندها فأننا نكتب

$$s_n \to +\infty \ .$$

بنفس الطريقة، إذا كان لكل M حقيقية يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $s_n \leq M$، فإننا نكتب

$$s_n \to -\infty \ .$$

تجدر الإشارة إلى أننا نستخدم الآن الرمز $\to$ (الذي قدم في التعريف٣، ١) لأنواع معينة من المتتاليات المتباعدة، إضافة إلى المتتاليات المتقاربة، وبأن تعاريف الاقتراب والغاية المقدمة في التعريف ٣، ١، لم تتغير أبدا.

٣، ١٦ تعريف: لتكن $\{s_n\}$ متتالية للأعداد الحقيقية. لتكن E المجموعة التي تضم الأعداد x (في النظام الموسع للأعداد الحقيقية) بحيث $s_{nk} \to x$ لبعض ا لمتتاليات الجزئية $\{s_{nk}\}$. تحتوي هذه المجموعة E على جميع الغايات لمتتاليات الجزئية كما معرفة في التعريف ٣، ٥، ومن الممكن أن تحوي العددين $+\infty \ , \ -\infty$.

نستذكر الآن التعريفين ١، ٨و١، ٢٣ ونضع

$$s^* = \sup E \ ,$$
$$s_* = \inf E \ .$$

يسمى العددين s^* و s_*، *الغايتين العليا والسفلي لـ upper and lower limits of* $\{s_n\}$؛ ونستخدم لهما الرمزين الآتيين:

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = s^* \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \inf s_n = s_* \ .$$

٣، ١٧ مبرهنة: *لتكن* $\{s_n\}$ متتالية للأعداد الحقيقية. لتكن E و s^* *تمتلكان نفس المعنى الوارد في التعريف ٣، ١٦. عندها فإن s^* تمتلك الخاصيتين الآتيتين:*

(أ) $s^* \in E$.

(ب) إذا كانت $x > s^*$، فيوجد هنالك عدد صحيح N بحيث أن $n \geq N$ يؤدي إلى أن $s_n < x$.

إضافة لذلك، فإن s^* s هو العدد الوحيد الذي يمتلك الخاصيتين (أ)، (ب).

من الطبيعي، أن تصح النتيجة المناظرة لهذه النتيجة بالنسبة لـ s_*..

البرهان:

(أ) إذا كانت $s^* = +\infty$، فإن E ليست مقيدة من الأعلى ؛ إذن $\{s_n\}$، ليست مقيدة من الأعلى، ويوجد هنالك متتالية جزئية $\{s_{nk}\}$ بحيث $s_{nk} \to +\infty$.

إذا كانت s^* عدداً حقيقياً، فإن E مقيدة من الأعلى، ويوجد هنالك غاية متتالية جزئية واحدة على الأقل، لذلك فإن (أ) تستنتج من المبرهنتين ٣، ٧و ٢، ٢٨.

إذا كانت $s^* = -\infty$ فإن E تحتوي على عنصراً واحداً، فقط هو $-\infty$، ولا يوجد هنالك غاية للمتتابعة الجزئية. إذن، لكل عدد حقيقي M، $s_n > M$ بالنسبة لعدد محدد من قيم n. على الأكثر، لذلك فإن $s_n \to -\infty$.

أن هذا يبرهن (أ) بجميع الاحتمالات.

(ب) لنفترض أن هنالك عدداً $x > s^*$ بحيث $s_n \geq x$ بالنسبة لعدد لانهائي من قيم n، في هذه الحالة، يوجد هنالك عدداً $y \in E$ بحيث $y \geq x > s^*$، الأمر الذي يناقض تعريف s^*.

لذلك فإن s^* تحقق (أ) و (ب).

لبيان الوحدانية، نفترض أن هنالك عددين، p و q، يحققان (أ) و (ب)، ونفترض أن $p < q$. نختار x بحيث $p < x < q$. بما أن p تحقق (ب)، فإن $s_n < x$ بالنسبة لـ $n \geq N$. ولكن عندها فإن q لا تستطيع أن تحقق (أ).

٣، ١٨ أمثلـــة:

(أ) لتكن $\{s_n\}$ متتالية تحتوي على جميع الأعداد النسبية. عندها فإن كل عدد حقيقي هو غاية لمتتالية جزئية، و

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad ، \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty .$$

(ب) لتكن $s_n = (-1)^n / [1 + (1/n)]$. فإن

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1 \quad ، \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = -1$$

(ج) بالنسبة لمتتالية القيم الحقيقية $\{s_n\}$، فإن $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ إذا وإذا فقط كان

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s \ .$$

نختتم هذا الجزء بمبرهنة مفيدة، وبرهانها بسيط جداً:

٣، ١٩ مبرهنة: *إذا كانت $s_n \le t_n$ بالنسبة لـ $n \ge N$، حيث أن N ثابتة، فإن*

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \le \liminf_{n\to\infty} t_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \le \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

بعض المتتاليات الخاصة Some Special Sequences

سوف نقوم الآن باحتساب غايات بعض المتتاليات التي يتكرر حدوثها. سوف تُبنى جميع البراهين على الملاحظة الآتية: إذا كانت $0 \le x_n \le s_n$ بالنسبة لـ $n \ge N$، حيث N عدد معين، وإذا كانت $s_n \to 0$، عندها فإن $x_n \to 0$.

٣، ٢٠ مبرهنة:

(أ) إذا كانت $p > 0$، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

(ب) إذا كانت $p > 0$، فإن $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(ج) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(د) إذا كانت $p > 0$ وα عدداً حقيقياً، فإن $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(هـ) إذا كانت $|x| < 1$، فإن $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

البرهان:

(أ) نأخذ $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$. (لاحظ بأننا نستخدم هنا الخاصية الارخميديسية لنظام الأعداد الحقيقية).

(ب) إذا كانت $p > 1$، نضع $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. عندها فإن $x_n > 0$، واستناداً إلى مبرهنة الحدين فإن

$$1 + nx_n \le (1+x_n)^n = p \quad ,$$

لذلك فإن
$$0 \le x_n \le \frac{p-1}{n}.$$

إذن $x_n \to 0$. إذا كانت $p=1$، فإن (ب) بسيطة جداً، وإذا كانت $0<p<1$، فنحصل على النتيجة بأخذ المعاكسات.

(ج) نضع $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$، عندها فإن $x_n \ge 0$، واستناداً لمبرهنة الحدين، فإن
$$n = (1+x_n)^n \ge \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 .$$

إذن
$$(n \ge 2) \qquad 0 \le x_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

(د) ليكن k عدداً صحيحاً بحيث $k > \alpha$, $k > 0$ بالنسبة إلى $n > 2k$
$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!} .$$

إذن
$$(n > 2k) \qquad 0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} .$$

بما أن $\alpha - k < 0$ ، فإن $n^{\alpha-k} \to 0$ استناداً إلى (أ).

(هـ) نضع $\alpha = 0$ في (د).

المتسلسلات Series

فيما تبقى من هذا الفصل، ستكون جميع المتاليات والمتسلسلات التي نتناولها أقيامها عقدية *complex - valued*، ما لم يرد ما ينص على عكس ذلك. التمرين ١٥ يبين توسعات بعض المبرهنات التي سنقدمها للمتسلسلات التي تكون حدودها في $\mathbf{R}^k$.

٣، ٢١ تعريف: لنأخذ المتالية $\{a_n\}$، نستخدم الرمز
$$(p \le q) \qquad \sum_{n=p}^{q} a_n .$$

للإشارة إلى المجموع $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$. مع $\{a_n\}$ نرفق المتالية $\{s_n\}$، حيث
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

بالنسبة لـ $\{s_n\}$ فإننا نستخدم أيضا الاصطلاح الرمزي
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

أو، بصورة اكثر اختصاراً،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ . \qquad (٤)$$

نسمي الرمز (٤) *متسلسلات لانهائية* ***infinite series***، أو *متسلسلات* فقط ***series***. تسمى الأعداد s_n *المجموعات الجزئية* ***the partial sum*** للمتسلسلات. إذا كانت $\{s_n\}$ تتقارب إلى s، فإننا نقول أن *المتسلسلة تتقارب* ***the series converges***، ونكتب

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \ .$$

يسمى العدد s المجموع للمتسلسلة ؛ولكن يجب أن يفهم بشكل واضح أن s هو *الغاية لمجموع المتتاليات* ***is the limit of a sequence of sums***، ولا يتم الحصول عليه بمجرد استخدام عملية الجمع.

إذا كانت $\{s_n\}$ تتباعد، فيقال أن المتسلسلة تتباعد.

في بعض الأحيان، ولتسهيل الترميز، فإننا سنتناول المتسلسلات في الشكل الآتي

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ . \qquad (٥)$$

وبين فترة وأُخرى، حين لا يكون هنالك مجالاً للغموض، أو حينما يكون التميز عديم الأهمية، فإننا سنكتب $\sum a_n$ فقط بدلاً من (٤) أو (٥).

من الواضح أن كل مبرهنة تخص المتتاليات يمكن إعادة صياغتها لتخص المتسلسلات أيضا (بوضع $a_1 = s_1$، و $a_n = s_n - s_{n-1}$ بالنسبة لـ $n > 1$)، والعكس بالعكس. على العكس من ذلك فإنه من المفيد أن ندرس كلا المفهومين. يمكن إعادة قاعدة كوشي (المبرهنة ٣، ١١) بالشكل الآتي:

٣، ٢٢ مبرهنة: *تتقارب* $\sum a_n$ *إذا وإذا فقط كان لكل* $\varepsilon > 0$ *يوجد هنالك عدداً صحيحاً* N *بحيث*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \varepsilon \qquad (٦)$$

إذا كانت $m \ge n \ge N$.

بشكل خاص، إذا وضعنا $n = m$، فإن (٦) ستصبح

$$|a_n| \le \varepsilon \qquad (n \ge N).$$

بكلمة أخرى:

٣، ٢٣ مبرهنة: *إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

إن الشرط $a_n \to 0$ ليس كافياً لضمان اقتراب $\sum a_n$. على سبيل المثال، فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

تتباعد؛ لبرهنة ذلك راجع المبرهنة ٣، ٢٨.

المبرهنة ٣، ١٤، المتعلقة بالمتتاليات الرتيبة، وأيضا بشكل مباشر ما يماثلها للمتسلسلات.

٣، ٢٤ مبرهنة: *تتقارب المتسلسلة ذات الحدود الغير سلبية[1] إذا وإذا فقط كانت مجموعاتها الجزئية تشكل متتالية مقيدة.*

نتناول الآن مسألة اختبار الاقتراب، بطبيعة مختلفة، وهو ما يسمى "اختبار المقارنة" **"comparison test"**.

٣، ٢٥ مبرهنة:

(أ) إذا كانت $|a_n| \le c_n$ بالنسبة لـ $n \ge N_0$، حيث N_0 عددا صامدا، وإذا كانت $\sum c_n$ تتقارب، فإن $\sum a_n$ تتقارب.

(ب) إذا كانت $a_n \ge d_n \ge 0$ بالنسبة لـ $n \ge N_0$، وإذا كانت $\sum d_n$ تتباعد، فإن $\sum a_n$ تتباعد.

لاحظ بأن (ب) تنطبق فقط على المتسلسلات ذات الحدود الغير سالبه a_n.

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك $N \ge N_0$ بحيث أن $m \ge n \ge N$ إلى أن

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \le \varepsilon ,$$

استناداً إلى قاعدة كوشي. إذن

---

(١) إن المصطلح "الغير سلبي" "nonnegative" يشير إلى الأعداد الحقيقية.

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m}\left|a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} c_k \le \varepsilon ,$$

وهذا يبرهن (أ).

الخطوة الآتية، (ب) تستنتج من (أ)، لأنه إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، فإن $\sum d_n$ يجب أن تتقارب أيضا [لاحظ بأن (ب) تستنتج أيضا من المبرهنة ٣، ٢٤].

أن اختبار المقارنة مفيد جداً ؛ ولكي يتسنى لنا استخدامه بصورة صحيحة يتوجب علينا أن نتعرف على بعض المتسلسلات ذات الحدود الغير سالبة والتي تقاربها أو تباعدها معروف.

متسلسلات ذات حدود غير سالبة

Series Of Nonnegative Terms

ربما تكون المتسلسلة الهندسية *geometric series* ابسط أنواع هذه المتسلسلات.

٣، ٢٦ مبرهنة: *إذا كانت $0 \le x < 1$، فإن*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} .$$

إذا كانت $x \ge 1$، فإن المتسلسلة تتباعد.

البرهان: إذا كانت $x \ne 1$، فإن

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} .$$

ونحصل على النتيجة عندما $n \to \infty$. و إذا كانت $x = 1$، فـإننا نحصل على

$$1+1+1+\cdots,$$

التي من الواضح أنها تتباعد.

في حالات عديدة تحدث أثناء التطبيق، يتناقص ترتيب حدود المتسلسلة. الأمر الذي يكسب المبرهنة التالية لكوشي أهميه خاصة. أن الميزة المهمة لهذه المبرهنة هي أن المتتالية الجزئية " رقيقه " " thin " لـ $\{a_n\}$ هي التي تحدد تقارب أو تباعد $\sum a_n$.

٣، ٢٧ مبرهنة: *نفترض أن $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge 0$. عندها فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب إذا وإذا فقط كانت المتسلسلة*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \qquad (٧)$$

تتقارب.

البرهان: استناداً إلى المبرهنة ٣، ٢٤، يكفي أن ندرس تقيد **boundedness** المجامع الجزئية. لتكن

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

بالنسبة لـ $n < 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\le a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k, \end{aligned}$$

لذلك فإن

$$s_n \le t_k. \qquad (٨)$$

من جهة أخرى، إذا كانت لـ $n > 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\ge \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}t_k, \end{aligned}$$

لذلك فإن

$$2s_n \ge t_k. \qquad (٩)$$

استناداً إلى (٨) و(٩)، فإنه إما أن تكون كلا المتتاليتين $\{s_n\}$ و$\{t_k\}$ مقيدة أو تكونا غير مقيدة. وهذا ينهي البرهان.

٣، ٢٨ مبرهنة: *تتقارب* $\sum \frac{1}{n^p}$ *إذا كان* $p > 1$، *وتتباعد إذا كان* $p \le 1$.

البرهان: إذا كانت $p \le 0$، فإنه يستدل على التباعد من المبرهنة ٣، ٢٣. إذا كانت $p > 0$، نطبق المبرهنة ٣، ٢٧، الأمر الذي يقودنا إلى المتسلسلة

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} \quad .$$

الآن، تكون $2^{1-p} < 1$ إذا وإذا فقط كان $1-p < 0$، وتحصل على النتيجة بالمقارنة مع المتسلسلة الهندسية (ضع $x = 2^{1-p}$ في المبرهنة٣، ٢٦).

وكتطبيق إضافي للمبرهنة ٣، ٢٧، فإننا نبرهن:

٣، ٢٩مبرهنة: *إذا كانت $p > 1$، فإن المتسلسلة*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \qquad (١٠)$$

تتقارب ؛إذا كانت $p \le 1$، فإنها تتباعد.

ملاحظة: يرمز "$\log n$" إلى اللوغاريتم لـــ n للأساس e (قارن التمرين ٧، الفصل الأول)؛ سوف نقوم بتعريف e قريباً (لاحظ التعريف ٣، ٣٠). لقد ابتدأنا المتسلسلة بوضع $n = 2$ لأن $\log 1 = 0$.

البرهان: أن ترتيب الدالة اللوغارتمية (التي سوف ندرسها بتفصيل اكثر في الفصل الثامن) يدل على أن $\{\log n\}$ متزايدة. إذن $\{1/n \log n\}$ متناقصة، ونستطيع تطبيق المبرهنة ٣، ٢٧ لـــ (١٠)؛ وهذا يؤدي بنا إلى المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k(\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} , \qquad (١١)$$

وتستنتج المبرهنة ٣، ٢٩ من المبرهنة ٣، ٢٨.

من الواضح أنه بالإمكان الاستمرار بهذا النهج. على سبيل المثال، فإن،

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n} \qquad (١٢)$$

تتباعد، في حين أن

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^2} \qquad (١٣)$$

تتقارب.

نلاحظ الآن أن حدود المتسلسلة (١٢) تختلف قليلاً جداً عن حدود المتسلسلة (١٣). على الرغم من ذلك فإن واحدة تتباعد، والأخرى تتقارب.

إذا استمرينا في الخطوات التي أدت بنا من المبرهنة ٣،٢٨ إلى المبرهنة ٣،٢٩، وبعدها إلى (١٢) و(١٣)، نحصل على أزواج من المتسلسلات المتقاربة والمتباعدة التي تختلف حدودها حتى اقل من تلك التي في (١٢) و(١٣). فإن المرء ربما يتوصل إلى حدس مفاده أن هناك حالة محددة نوعاً ما، أو "مقيدة" يفصل بين المتسلسلات المتقاربة من جهة والمتباعدة من جهة أخرى – على الأقل فيما يخص المتسلسلات ذات المعاملات الرتيبة. مصطلح "القيد" هذا هو بالطبع مبهم وغير واضح. أن ما نريد توضيحه في هذا المجال هو: انه مهما حاولنا جعل هذا المصطلح أكثر دقة، فإن الحدس هو حدس خاطئ. قد يساهم التمرينان ١١ (ب) و١٢ (ب) بإيضاح هذه النقطة.

إننا لا نرغب بالتعمق اكثر من ذلك في مفهوم نظرية التقارب، ونشير للقارئ إلى"نظرية وتطبيق المتسلسلات اللانهائية" لـ نوب *knopp`s theory and Application of "* *Infinite Series* الفصل IX، وعلى وجه الخصوص البند ٤١.

العدد The Number e

٣، ٣٠ تعريف: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

في هذه الحالة $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ إذا كانت $n \geq 1$ و $0! = 1$.

بما أن

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

فإن المتسلسلة تتقارب، والتعريف يحمل معناً موضوعياً. في الواقع، أن المتسلسلة تتقارب بصوره سريعة جداً وتسمح لنا باحتساب e بصوره دقيقه جداً.

من الجدير بالذكر يمكننا أيضا تعريف e بواسطة طريقه أخرى تعتمد على تحليل الغاية؛ والتي يقدم البرهان فيها توضيحاً جيداً لعمليات الغايات:

٣، ٣١ مبرهنة: $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

البرهان: لتكن

$$t_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad , \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} .$$

استناداً إلى مبرهنة الحدين، فإن

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}).$$

إذن $t_n \le s_n$، لذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty} \sup t_n \le e\,, \qquad (١٤)$$

استناداً إلى المبرهنة ٣، ١٩. الخطوة الآتية، إذا كانت $n \ge m$، فإن

$$t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{m!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{m-1}{n})\ .$$

لندع $n \to \infty$، ونبقي على m ثابتة. فإننا نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \inf t_n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\ ,$$

لذلك فإن

$$s_m \le \lim_{n\to\infty} \inf\ t_n\ .$$

وبالسماح لـ $m \to \infty$، فإننا نحصل في النهاية على

$$.e \le \lim_{n\to\infty} \inf\ t_n \qquad (١٥)$$

والمبرهنة تستنتج من (١٤) و (١٥).

من الممكن تقدير السرعة التي تتقارب بموجبها المتسلسلة $\sum \frac{1}{n!}$ كالآتي: إذا كانت s_n تحمل نفس المعنى كما في أعلاه، فإن

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{n!n}$$

لذلك فإن

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}\ . \qquad (١٦)$$

لذلك فإن s_{10}، على سبيل المثال، تقرب e بخطأ يبلغ أقل من 10^{-7}. أن المتباينة (١٦) تحمل أيضاً أهمية من الناحية النظرية، وذلك لكونها تمكننا من البرهنة على عدم نسبية e بسهولة كبيرة.

٣، ٣٢ مبرهنة: *تكون e غير نسبية .*

البرهان: لنفترض أن e نسبية. عندها فإن $e = p/q$، حيث أن p و q عددين صحيحين موجبين.

استنادا إلى (١٦)، فإن

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \quad . \tag{١٧}$$

استنادا إلى افتراضنا، فإن $q!\,e$ هي عدد اً صحيحاً. بما أن

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

هي عدداً صحيحاً، فإننا نلاحظ أن $q!(e - s_q)$ عدداً صحيحاً أيضاً.

بما أن $q \geq 1$، فإن (١٧) تدل على وجود عدد صحيح بين 0 و 1. و بذلك فإننا نكون قد توصلنا إلى تناقض.

في الحقيقة، فإن e ليست عدد اً جبرياً. وكبرهان بسيط على ذلك، راجع الصحيفة ٢٥ من كتاب نيفن Niven's، أو صفحة ١٧٦ من كتاب هيرستاين Herstein's، المذكور في المراجع.

الاختبارين الجذري والنسبي The Root And Ratio Tests

٣، ٣٣ مبرهنة (الاختبار الجذري) Root Test

إذا أخذنا $\sum a_n$*، ونضع* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

فإن

(أ) *إذا كانت* $\alpha < 1$ *، فإن* $\sum a_n$ *تتقارب ؛*

(ب) إذا كانت $\alpha > 1$ *، فإن* $\sum a_n$ *تتباعد ؛*

(ج) *إذا كانت* $\alpha = 1$*، فإن الاختبار لا يقدم أية معلومات.*

البرهان: إذا كانت $\alpha < 1$، بإمكاننا أن نختار β بحيث $\alpha < \beta < 1$، و N عدد اً صحيحاً بحيث

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

بالنسبة لـ $n \geq N$ [استناداً إلى المبرهنة ٣، ١٧ (ب)]. أي أن، $n \geq N$ يدل على أن

$$|a_n| < \beta^n \ .$$

بما أن $0 < \beta < 1$، فإن $\sum \beta^n$ تتقارب. أن تقارب $\sum a_n$ ينتج الآن من اختبار المقارنة.

إذا كانت $\alpha > 1$، فإنه، استنادا إلى المبرهنة ٣، ١٧ مرة ثانيه، يوجد هنالك متتالية $\{n_k\}$ بحيث

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha \ .$$

إذن $|a_n| > 1$ لعدد لانهائي من قيم n، لذلك فإن الشرط $a_n \to 0$، اللازم لاقتراب $\sum a_n$، لا يتحقق (المبرهنة ٣، ٢٣).

لبرهنة (ج)، نلاحظ المتسلسلتين $\sum \frac{1}{n}$ ، $\sum \frac{1}{n^2}$.

لكل من هاتين المتسلسلتين $\alpha = 1$، ولكن الأولى تتباعد والثانية تتقارب.

٣، ٣٤ مبرهنة (الاختبار النسبي) (*Ratio Test*) *المتسلسلة* $\sum a_n$

(أ) *تتقارب إذا كان* $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$،

(ب) *تتباعد إذا كان* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *بالنسبة لـ* $n \geq n_0$، *حيث* n_0 *عدد صحيح ثابت معلوم.*

البرهان: إذا صح الشرط (أ)، فإن بإمكاننا أن نجد $\beta < 1$، وعدد صحيح N، بحيث

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta$$

بالنسبة لـ $n \geq N$. وعلى وجه الخصوص،

$$|a_{N+1}| < \beta \ |a_N|,$$
$$|a_{N+2}| < \beta \ |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|a_{N+p}| < \beta^p \ |a_N|.$$

وهذا يعني،

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \cdot \beta^n$$

بالنسبة لـ $n \geq N$، وتستنتج (أ) من اختبار المقارنة، نظراً لأن $\sum \beta^n$ تتقارب.

إذا كانت $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ بالنسبة لـ $n \geq n_0$، فإنه من السهولة أن نلاحظ أن الشرط $a_n \to 0$ لا يتحقق، وينتج عن ذلك (ب).

ملاحظة: إن معرفة $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ لا تقدم أي مدلول على اقتراب $\sum a_n$. تدل المتسلسلتان $\sum 1/n$ و $\sum 1/n^2$ على ذلك.

٣، ٥ ٣ أمثلة

(أ) لاحظ المتسلسلة

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

والتي فيها يكون

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty.$$

إن الاختبار الجذري يدل على التقارب ؛ بينما لا ينطبق ذلك على الاختبار النسبي.

(ب) نفس الشيء يصح على المتسلسلة

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots,$$

حيث

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\ ,$$

ولكن

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\ .$$

٣، ٣٦ ملاحظات: غالباً ما يكون الاختبار النسبي أسهل تطبيقاً من الاختبار الجذري، نظراً لأن احتساب النسب يكون في اغلب الأحيان اسهل من أيجاد الجذور النونية. على الرغم من ذلك، فإن الاختبار الجذري يمتلك آفاقا اكبر. وعلى وجه الخصوص: كلما بين الاختبار النسبي حالة اقتراب، فإن الاختبار الجذري يفعل نفس الشيء ؛ وكلما كان الاختبار الجذري غير حاسماً، فإن الاختبار النسبي يكون كذلك أيضا. أن هذا هو نتيجة للمبرهنة ٣، ٣٧، وهو موضح بالأمثلة أعلاه.

ولا واحد من هذين الاختبارين دقيق بخصوص التباعد **divergence**. كلاهما يستنتجان التباعد من خلال كون a_n لا تفضي إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

٣، ٣٧ مبرهنة: *لكل متتالية* $\{c_n\}$ *من الأعداد الموجبة،*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

البرهان: سوف نبرهن المتباينة الثانية ؛ أما برهان الأولى فإنه مشابه لذلك تماماً. نضع

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} .$$

إذا كانت $\alpha = +\infty$، فلا يوجد شيء لبرهنته. إذا كانت α منتهية، نختار $\beta > \alpha$. يوجد عدد صحيح N بحيث

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \le \beta$$

لـ $n \ge N$. بصورة خاصة، لأي $p > 0$،

$$c_{N+k+1} \le \beta\, c_{N+k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

بضرب هاتين المتباينتين، فأننا نحصل على

$$c_{N+p} \le \beta^p c_N ,$$

أو

$$c_n \le c_N\, \beta^{-N} \cdot \beta^n, \quad (n \ge N)$$

إذن

$$\sqrt[n]{c_n} \le \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}}.\beta ,$$

لذلك فإن

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \beta \,, \qquad (١٨)$$

استناداً للمبرهنة ٣، ٢٠ (ب). بما أن (١٨) تتحقق لكل $\beta > \alpha$، فإن

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \alpha \ .$$

متسلسلات القوى Power Series

٣، ٣٨ تعريف: إذا أخذنا المتتالية $\{c_n\}$ للأعداد العقدية، فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n \qquad (١٩)$$

تسمى *متسلسلات القوى power series*. نطلق على الأعداد c_n *معاملات المتسلسلة coefficients*؛ z عدداً عقدياً.

بصوره عامة، فإن المتسلسلات تتقارب أو تتباعد، طبقاً لاختيار z. بصوره اكثر دقة، لكل متسلسلة قوى يوجد هنالك دائرة مرادفة لها، دائرة التقارب، بحيث أن (١٩) تتقارب إذا كانت z تقع في القسم الداخلي من الدائرة، وتتباعد إذا كانت z تقع في القسم الخارجي (لتغطية جميع الحالات، علينا أن نتصور المستوي بمثابة القسم الداخلي من دائرة بنصف قطر لانهائي، ونقطة بمثابة دائرة بنصف قطر يساوي صفر). أن السلوك في دائرة التقارب متنوع بشكل كبير ولا يمكن وصفه بسهولة.

٣، ٣٩ مبرهنة: *لناخذ متسلسلة القوى* $\sum c_n z^n$، *نضع*

$$R = \frac{1}{\alpha} \quad , \qquad \alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \ .$$

(إذا كانت $\alpha = 0$، فإن $R = +\infty$; إذا كانت $\alpha = +\infty$ فإن $R = 0$). عندها فإن $\sum c_n\ z^n$ تتقارب إذا كانت $|z| < R$، وتتباعد إذا كانت $|z| > R$.

البرهان: نضع $a_n = c_n\ z^n$، ونطبق الاختبار الجذري:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{|z|}{R} \ .$$

ملاحظة: تدعى R نصف قطر التقارب لـــ $\sum c_n\ z^n$.

٣، ٤٠ أمثلة:

(أ) المتسلسلة $\sum n^n z^n$ تمتلك $R = 0$.

(ب) المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n!}$ تمتلك $R = +\infty$. (في هذه الحالة فإن الاختبار النسبي هو الأسهل في التطبيق من الاختبار الجذري).

(ج) المتسلسلة $\sum z^n$ تمتلك $R = 1$. إذا كانت $|z| = 1$، فإن المتسلسلة تتباعد، نظراً لأن $\{z^n\}$ لا تقضي إلى الصفر عندما $n \to \infty$.

(د) المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n}$ تمتلك $R = 1$. هي تتباعد إذا كانت $z = 1$. هي تتقارب لكل قيم z بحيث $|z| = 1$. (التأكيد الأخير سوف يبرهن في المبرهنة ٣، ٤٤).

(هـ) المتسلسلة $\sum \frac{z^n}{n^2}$ تمتلك $R = 1$. هي تتقارب لكل قيم z بحيث $|z| = 1$، استناداً إلى اختبار المقارنة، نظرا لأن $|z^n / n^2| = 1/n^2$.

الجمع بالتجزئة (الأجزاء) Summation By Parts

٣، ٤١ مبرهنة: *لنأخذ متتاليتين* $\{a_n\}, \{b_n\}$*، نضع*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

إذا كانت $n \ge 0$ *؛ نضع* $A_{-1} = 0$*. عندها، إذا كانت* $0 \le p \le q$*، فإن*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \quad (٢٠)$$

البرهان:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1},$$

من الواضح أن العبارة الأخيرة في الجهة اليمنى تساوي الجهة اليمنى لـ (٢٠). المعادلة (٢٠)، التي تسمى "معادلة الجمع الجزئي" "partial summation formula" مفيدة في دراسة وتقصي المتسلسلات التي على هيئة $\sum a_n b_n$، وعلى وجه الخصوص عندما تكون $\{b_n\}$ رتيبة. سنقدم الآن بعض التطبيقات.

٣، ٤٢ مبرهنة: نفترض أن

(أ) المجاميع الجزئية A_n لـ $\sum a_n$ تكون متتالية مقيدة ؛

(ب) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$ ؛

(ج) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

عندها فإن $\sum a_n b_n$ تتقارب.

البرهان: نختار M بحيث $|A_n| \leq M$ لجميع n. لتكن $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث $b_N \leq (\varepsilon/2M)$. بالنسبة إلى $N \leq p \leq q$، فإن

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\, b_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q\, b_q - A_{p-1}\, b_p\right|$$

$$\leq M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right|$$

$$= 2M\, b_p \leq 2M\, b_N \leq \varepsilon.$$

التقارب الآن يتأتى من قاعدة كوشي. نلاحظ أن المتباينة الأولى في الحلقة أعلاه تعتمد بالطبع على كون $b_n - b_{n+1} \geq 0$.

٣، ٤٣ مبرهنة: لنفترض أن

(أ) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$ ؛

(ب) $c_{2m-1} \geq 0$, $c_{2m} \leq 0$ $(m = 1,2,3,\ldots)$ ؛

(ج) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

عندها فإن $\sum c_n$ تتقارب.

تسمى المتسلسلة التي تتحقق فيها (ب) *"المتسلسلة المتناوبة"* ***alternating series*** ؛ كانت المبرهنة معروفة لـ ليبنز ***Leibnitz***.

البرهان: طبق المبرهنة ٣، ٤٢، بوضع $a_n = (-1)^{n+1}$ ، $b_n = |c_n|$.

٣، ٤٤ مبرهنة: *لنفترض أن نصف قطر التقارب لـ* $\sum c_n z^n$ *يساوي 1، ولنفترض أن* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$، $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. عندها فإن $\sum c_n z^n$ *تتقارب في أي نقطه على*

الدائرة $|z| = 1$، *ربما ماعدا في* $z = 1$.

البرهان: ضع $b_n = c_n$, $a_n = z^n$. عندها فإن افتراضات المبرهنة ٣، ٤٢ تكون قد تحققت، لأنه

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1-z^{m+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|},$$

إذا كانت $|z| = 1$، $z \neq 1$.

التقارب المطلق Absolute Convergence

يقال للمتسلسلة $\sum a_n$ بأنها *تتقارب بصوره مطلقة* ***converges absolutely*** إذا كانت المتسلسلة $\sum |a_n|$ تتقارب.

٣، ٤٥ مبرهنة: إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب بشكل مطلق، فإن $\sum a_n$ تتقارب.

البرهان: إن التوكيد يتأتى من المتباينة

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{n=k}^{m} |a_k|,$$

أضافه إلى قاعدة كوشي.

٣،٤٦ ملاحظات: بالنسبة لمتسلسلات الحدود الموجبة، التقارب المطلق هو نفس التقارب.

إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، ولكن $\sum |a_n|$ تتباعد، فإننا نقول $\sum a_n$ *تتقارب بصورة غير مطلقة* ***converges non- absolutely***. على سبيل المثال، فإن المتسلسلة

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

تتقارب بصورة غير مطلقة (المبرهنة ٣، ٣٤).

إن اختبار المقارنة، وكذلك الاختبارين الجذري والنسبي، هو في الواقع اختباراً للتقارب المطلق، وهو لذلك لا يستطيع أن يقدم أية معلومات بخصوص التقارب الغير المطلق للمتسلسلات. من الممكن استخدام الجمع بالتجزئة في بعض الأحيان لمعالجة هذا الموضوع. بصوره خاصة، تتقارب متسلسلات القوى بصوره مطلقة في القسم الداخلي من دائرة التقارب.

سوف نلاحظ بأننا قد نتعامل مع متسلسلات التقارب المطلق بنفس الطريقة التي نتعامل بها

مع المجامع المنتهية. بإمكاننا أن نطبق عملية الضرب عليهم حدا حداً وكذلك باستطاعتنا أن نغير الترتيب الذي تتم به عملية الجمع، بدون أن يؤثر ذلك على مجموع المتسلسلة. أن هذا لا يصح على متسلسلات التقارب الغير المطلق، لذلك فأننا يجب أن نكون حذرين في التعامل معهم.

جمع وضرب المتسلسلات

Addition And Multiplication Of Series

٣، ٤٧ مبرهنة: *إذا كانت* $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ *فإن* $\sum (a_n + b_n) = A + B$، و $\sum ca_n = cA$، *لأي* c *ثابتة.*

البرهان: لتكن

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \text{و} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \ .$$

عندها فإن

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \ .$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} B_n = B$، فإننا نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B \ .$$

أما برهان الجزء الثاني من المبرهنة فإنه اسهل من هذا البرهان.

لذلك فإنه من الممكن جمع متسلسلتين متقاربتين، حدا حداً، و تتقارب المتسلسلة الناتجة عن عملية الجمع هذه إلى مجموع المتسلسلتان. تصبح هذه المتسلسلة اكثر تعقيداً عندما نتناول موضوع ضرب متسلسلتين. وكبداية للموضوع، يتوجب علينا، تعريف حاصل الضرب. من الممكن أن يتم ذلك بعدة طرق؛ وسوف ندرس أولا ما يسمى *"حاصل ضرب كوشي"* ***Cauchy product***.

٣، ٤٨ تعريف: لنأخذ $\sum a_n$ و $\sum b_n$، نضع

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

فإننا نسمي $\sum c_n$ حاصل ضرب المتسلسلتين المأخوذتين.

من الممكن تفسير هذا التعريف كآلآتي. إذا أخذنا متسلسلتين للقوى

$\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$، ونضربهما حداً حداً، ونجمع الحدود التي تحتوي على نفس القوى لـ z، فإننا نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots$$
$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots.$$

بوضع $z = 1$ فإننا نتوصل إلى التعريف أعلاه.

٣، ٤٩ مثال: إذا كانت

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k ، \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k ، \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k ،$$

و $A_n \to A$, $B_n \to B$، عندها فإنه ليس من الواضح دائماً بأن $\{C_n\}$ سوف تتقارب إلى $A\,B$، وذلك لأننا لا نملك $C_n = A_n B_n$. أن اعتماد $\{C_n\}$ على $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ اعتماداً معقداً بالفعل (راجع تعريف المبرهنة ٣، ٥٠). سوف نبين الآن أن حاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين قد يتباعد بالفعل.

إن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

تتقارب (المبرهنة ٣، ٤٣). نكون حاصل ضرب هذه المتسلسلة بنفسها لنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots$$

لذلك فإن

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} .$$

بما أن

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \le \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 .$$

فإن

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

لذلك فإن الشرط $c_n \to 0$، وهو الشرط اللازم لاقتراب $\sum c_n$، لا يتحقق.

بالنسبة إلى المبرهنة القادمة، واستناداً إلى ميرتنز Mertens، نلاحظ بأننا تناولنا هنا حاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين بصوره غير مطلقة.

٣، ٥ مبرهنة: *لنفترض أن*

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *تتقارب بصورة مطلقة،*

(ب) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$،

(ج) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$،

(د) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$.

عندها فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A\,B .$$

بكلمه أخرى، يتقارب حاصل ضرب متسلسلتين متقاربتين، وتبقى القيمة صحيحة، إذا كانت إحدى هاتين المتسلسلتين تتقارب بصورة مطلقة.

البرهان: نضع

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \;,\; B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \;,\; C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \;,\; \beta_n = B_n - B \;.$$

إذن

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \end{aligned}$$

نضع

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0$$

نود الآن أن نبين أن $C_n \to AB$. بما أن $A_nB \to AB$، فيكفي أن نبين أن

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \;. \qquad (٢١)$$

نضع

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| .$$

[هنا نستخدم (أ)]. لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى (ج)، فإن $\beta_n \to 0$. إذن بإمكاننا أن نختار N بحيث $|\beta_n| \le \varepsilon$ بالنسبة لـ $n \ge N$، وفي هذه الحالة

$$|\gamma_n| \le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0|$$
$$\le |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha .$$

نُبْقي على N ثابتة، وندع $n \to \infty$، فإننا نحصل على

$$\limsup_{n \to \infty} |\gamma_n| \le \varepsilon \alpha ،$$

بما أن $a_k \to 0$ عندما $k \to \infty$. بما أن ε عشوائية، فإننا نستنتج (٢١).

السؤال الآخر الذي قد يثار هو أنه فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum c_n$، تتقارب، فسإنها ستمتلك المجموع لـ AB: بَيّنَ آبيل *Abel* بأن الجواب على ذلك السؤال هو بالإيجاب.

٣، ٥١ مبرهنة: *إذا كانت المتسلسلات* $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ ، $\sum c_n$ *تتقارب إلى* A، B، C **وكانت** $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$، *عندها فإن* $C = AB$.

هنا لم نضع أي افتراض بخصوص التقارب المطلق. سوف نقدم برهاناً بسيطاً (والذي يعتمد استمرارية متسلسلات القوى) بعد البرهنة ٨، ٢.

إعادة الترتيب Rearrangements

٣، ٥٢ تعريف: لتكن $\{k_n\}$، $n = 1,2,3,\ldots$، المتتالية التي يظهر فيها كل عدد صحيح موجب مرة واحدة فقط (أي أن، $\{k_n\}$ هي دالة 1-1 من J إلى J، في رمز التعريف ٢، ٢). نضع

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n = 1,2,3,\ldots) ،$$

فإننا نقول بأن $\sum a'_n$ هي إعادة ترتيب لـ $\sum a_n$.

إذا كانت $\{s_n\}$، $\{s'_n\}$ متتاليتي المجاميع الجزئية لـ $\sum a_n$، $\sum a'_n$، فإننا نلاحظ بسهولة بأنه، وبصورة عامة، تتألف هاتين المتتاليتين من أعداد مختلفة كلياً. وهذا يؤدي بنا إلى أن نُجابِه مشكلة تحديد الشروط التي تتقارب بموجبها جميع أعادات الترتيب للمتسلسلات المتقاربة

رفيما إذا كان بالضرورة أن تكون الجامع نفس الشيء.

٣، ٣٥ مثال: نتأمل المتسلسلة المتقاربة

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{٢٢}$$

وواحدة من إعادة ترتيبها

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{٢٣}$$

والتي يكون فيها كل حدين موجبين يعقبهما دائماً حداً سالباً. إذا كان s مجموع (٢٢)، فإن

$$s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\ .$$

بما أن

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$$

بالنسبة لـ $k\geq 1$، نلاحظ بأن $s_3'<s_6'<s_9'<\cdots$، حيث s_n' هي المجموع الجزئي النوني لـ (٢٣).

$$\lim_{n\to\infty}\sup s_n'>s_3'=\frac{5}{6}\ ،$$

كذلك فإن (٢٣) لا تتقارب بالتأكيد إلى s [نترك مسألة إثبات كون (٢٣) تتقارب إلى القارئ].

استنادا إلى ريمان Riemann، فإن هذا المثال يوضح المبرهنة الآتية.

٣، ٥٤ مبرهنة: *لتكن $\sum a_n$ متسلسلة من الأعداد الحقيقية والتي تتقارب، ولكن ليست بصوره مطلقة. لنفترض أن*

$$-\infty\leq\alpha\leq\beta\leq\infty\ .$$

عندها يوجد هنالك إعادة ترتيب $\sum a_n'$ بمجموع جزئي s_n' بحيث

$$\lim_{n\to\infty}\inf s_n'=\alpha\quad ,\quad \lim_{n\to\infty}\sup s_n'=\beta \tag{٢٤}$$

البرهان: لتكن

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}\quad ,\quad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

ثم $p_n - q_n = a_n$ ، $p_n + q_n = |a_n|$ ، $p_n \geq 0$ ، $q_n \geq 0$. كلاً من المتسلسلتين $\sum p_n$ ، $\sum q_n$ يجب أن يتباعد.

وذلك لأن إذا كان كليهما يتقارب، فإن

$$\sum (p_n + q_n) = \sum |a_n| ،$$

سوف تتقارب، وهذا يناقض افتراضنا. بما أن

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n ،$$

فإن تباعد $\sum p_n$ ، وتقارب $\sum q_n$ (أو بالعكس) يؤدي إلى تباعد $\sum a_n$ ، وهذا يناقض افتراضنا أيضاً.

الآن لتكن $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ترمز إلى الحدود الغير سالبه لـ $\sum a_n$ ، حسب تسلسل حدوثهما، ولتكن $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ القيم المطلقة للحدود السالبة لـ $\sum a_n$ ، وكذلك حسب تسلسلهما الأصلي.

تختلف المتسلسلتان $\sum P_n$ ، $\sum Q_n$ عن $\sum p_n$ ، $\sum q_n$ بالحدود الصفرية فقط، ولذلك فـإنهما تتباعدان.

سنقوم الآن بتركيب متتاليتين $\{m_n\}$ ، $\{k_n\}$، بحيث أن المتسلسلة

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots, \qquad (٢٥)$$

والتي من الواضح أنها إعادة ترتيب لـ $\sum a_n$ ، تحقق (٢٤).

نختار متتاليتين القيم الحقيقية $\{\alpha_n\}$،$\{\beta_n\}$ بحيث أن $\alpha_n \to \alpha$ ، $\beta_n \to \beta$ $\alpha_n < \beta_n$ ، و $\beta_1 > 0$.

لتكن m_1 ، k_1 أصغر عددين صحيحين بحيث

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

لتكن m_2 ، k_2 أصغر عددين صحيحين بحيث

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2;$$

ونستمر بهذه الطريقة. أن هذا ممكن لأن $\sum P_n$ و $\sum Q_n$ تتباعدان.

إذا كانت x_n و y_n ترمزان إلى المجامع الجزئية لـ (٢٥) و اللتان آخر حدودهما هما P_{m_n} ، $-Q_{k_n}$ ، فإن

$$\left|x_n - \beta_n\right| \le P_{m_n} \quad ، \quad \left|y_n - \alpha_n\right| \le Q_{k_n} .$$

بما أن $P_n \to 0$ و $Q_n \to 0$ عندما $n \to \infty$، فإننا نلاحظ أن $x_n \to \beta$ ، $y_n \to \alpha$.

أخيراً، فإنه من الواضح أنه لا يوجد هنالك عدداً أقل من α أو أكبر من β يمكن أن يكون غاية للمجموعة الجزئية للمجامع الجزئية لـ (٢٥).

٣، ٥٥ مبرهنة: *إذا كانت $\sum a_n$ متسلسلة من الأعداد العقدية والتي تتقارب بصورة مطلقة، عندها فإن كل إعادة ترتيب لـ $\sum a_n$ بتقارب، وإنهم جميعاً يتقاربون إلى نفس المجموع.*

البرهان: لتكن $\sum a'_n$ إعادة ترتيب، بمجامع جزئية s'_n. لنأخذ $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك عدد صحيح N بحيث أن $m \ge n \ge N$ يؤدي إلى

$$\sum_{i=n}^{m} \left|a_i\right| \le \varepsilon . \qquad (٢٦)$$

الآن نختار p بحيث أن جميع الأعداد الصحيحة $1,2,3,\ldots N$، محتواة بالمجموعة $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (نستخدم الرمز في التعريف ٣، ٥٢) عندها فإنه إذا كانت $n > p$، فإن الأعداد $a_1, \ldots a_N$ س سوف تمحي الفرق $s_n - s'_n$، لذلك فإن $\left|s_n - s'_n\right| \le \varepsilon$، استنادا إلى (٢٦). إذن $\{s'_n\}$ تتقارب إلى نفس مجموع $\{s_n\}$.

تمارين EXERCISES

١- برهن على أن اقتراب $\{s_n\}$ يؤدي إلى اقتراب $\{|s_n|\}$. هل يصح العكس ؟

٢- أحسب $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

٣- إذا كانت $s_1=\sqrt{2}$ ، و

$$s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}} \quad (n=1,2,3,\ldots)،$$

برهن على أن $\{s_n\}$ تتقارب وبـــان $s_n<2$ لكل $n=1,2,3,\ldots$.

٤- أوجد الغايتين العليا والسفلي للمتتالية $\{s_n\}$ المعرفة بـــ

$$s_1=0 \quad ، \quad s_{2m}=\frac{s_{2m-1}}{2} \quad ، \quad s_{2m+1}=\frac{1}{2}+s_{2m}$$

٥- لأي متتاليتين حقيقيتين $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$، برهن على أن

$$\lim_{n\to\infty}\sup(a_n+b_n)\le\lim_{n\to\infty}\sup a_n+\lim_{n\to\infty}\sup b_n،$$

شريطة أن لا يكون المجموع في الجهة اليمنى على شكل $\infty-\infty$.

٦- أستقصي السلوك (الاقتراب أو الابتعاد) $\sum a_n$ إذا كانت

(أ) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ؛

(ب) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ ؛

(ج) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$ ؛

(د) $a_n=\dfrac{1}{1+z^n}$، بالنسبة للقيم العقدية لـــ z.

٧- برهن على أن اقتراب $\sum a_n$ يؤدي إلى اقتراب $\sum\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$، إذا كانت $a_n\ge 0$.

٨- إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب، وكانت $\{b_n\}$ رتيبة ومقيدة، برهن على أن $\sum a_nb_n$ تتقارب.

٩- أوجد نصف قطر التقارب لكل من متسلسلات القوى الآتية:

(أ) $\sum n^3z^n$، (ب) $\sum\dfrac{2^n}{n!}z^n$، (ج) $\sum\dfrac{2^n}{n^2}z^n$، (د) $\sum\dfrac{n^3}{3^n}z^n$.

١٠- أفترض أن معاملات متسلسلات القوى $\sum a_nz^n$ تكون أعداد صحيحه، ما لانهاية

العدد والتي تختلف عن الصفر. برهن على أن نصف قطر التقارب يكون 1 على أكثر تقدير.

١١- أفترض أن $a_n > 0$ ، $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ، وإن $\sum a_n$ تتباعد.

(أ) برهن على أن $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ تتباعد.

(ب) برهن على أن

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

وأستنتج أن $\sum \frac{a_n}{s_n}$ تتباعد.

(ج) برهن على أن

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

واستنتج أن $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ تتقارب.

(د) ماذا يمكن أن يقال حول

$$\sum \frac{a_n}{1+na_n} \quad \text{و} \quad \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n} ?$$

١٢- افترض أن $a_n > 0$ و $\sum a_n$ تتقارب. ضع

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m .$$

(أ) برهن على أن

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m}$$

إذا كانت $m < n$، و نستنتج $\sum \frac{a_n}{r_n}$ تتباعد.

(ب) برهن على أن

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$$

واستنتج بأن $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ تتقارب.

١٣- برهن على أن حاصل الضرب الكوشي للمتسلسلتان المتقاربتان تقارباً مطلقاً يتقارب تقارباً مطلقاً.

١٤- إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية عقدية، عرف معدلاتها الحسابية σ_n بـــ

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \quad .(n=0,1,2,\dots)$$

(أ) إذا كانت $s_n = s$، برهن على أن $\lim \sigma_n = s$.

(ب) كوّن متتالية $\{s_n\}$ التي لا تتقارب، على الرغم من أن $\lim \sigma_n = 0$.

(ج) هل من الممكن أن تكون $s_n > 0$ لجميع n و $\lim \sup s_n = \infty$ على الرغم من أن $\lim \sigma_n = 0$ ؟

(د) ضع $a_n = s_n - s_{n-1}$، بالنسبة لـــ $n \geq 1$. بين أن

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k \quad .$$

افترض أن $\lim(na_n) = 0$ وان $\{\sigma_n\}$ تتقارب. برهن على أن $\{s_n\}$ تتقارب.
[أن هذا يقدم المعكوس لـــ (أ)، ولكن بموجب افتراض إضافي هو أن $na_n \to 0$].

(هـــ) اشتق الاستنتاج الأخير من افتراض اضعف: افترض أن $M < \infty$ ، $|na_n| \leq M$ لجميع n، وان $\lim \sigma_n = \sigma$. برهن على أن $\lim s_n = \sigma$، وذلك بتكملة الخطوات الآتية:

إذا كانت $m < n$ فإن

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \left(\frac{1}{n-m}\right) \sum_{i=m+1}^{n} (s_n - s_i) \quad .$$

بالنسبة لهذه الـــ i،

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2} \quad .$$

نضع $\varepsilon > 0$، ونرفق لكل n العدد الصحيح m الذي يحقق

$$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1 \quad .$$

عندها فإن $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ و $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. إذن

$$\lim_{n\to\infty} \sup |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon >$$

بما أن ε كانت عشوائية، $\lim s_n = \sigma$.

١٥- من الممكن توسيع التعريف ٣، ٢١ إلى الحالة التي تكون فيها الـ a_n تقع في بعض R^k الثابتة. يعرف التقارب المطلق بأنه تقارب $\sum|a_n|$. بين صحة المبرهنات ٣، ٢٢، ٣، ٣٣، ٣، ٢٥ (أ)، ٣، ٣٣، ٣، ٣٤، ٣، ٤٢، ٣، ٤٥، ٣، ٤٧، و ٣، ٥٥ وفق هذا المفهوم الأكثر عمومية. (يقتضي الأمر إجراء بعض التغيرات الطفيفة في كل برهان من البراهين).

١٦- حدد عدداً موجباً α. أختار $x_1 > \sqrt{\alpha}$ وعرف $x_2, x_3, x_4, \ldots$ وفق صيغة التكرار

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

(أ) برهن على أن $\{x_n\}$ تتناقص ترتيبياً وان $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(ب) ضع $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$، وبين أن

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

لذلك فإنه، بوضع $\beta = 2\sqrt{\alpha}$،

$$\varepsilon_{n+1} < \beta \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n} \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

(ج) أن هذه طريقه جيده لاحتساب الجذور التربيعية، بما أن صيغة التكرار هي صيغة بسيطة وان التقارب سريع جداً. على سبيل المثال، إذا كانت $\alpha = 3$ وان $x = 2$، بين أن $\varepsilon_1/\beta < \frac{1}{10}$ وبأنه تبعاً لذلك

$$\varepsilon_5 < 4.10^{-16}, \quad \varepsilon_6 < 4.10^{-32}.$$

١٧- ضع $\alpha > 1$ خذ. $x_1 > \sqrt{\alpha}$، وعرف

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}.$$

(أ) برهن على أن $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$.

(ب) برهن على أن $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$.

(ج) برهن على أن $\lim x_n = \sqrt{\alpha}$.

(د) قارن سرعة تقارب هذه الخطوات مع الطريقة المذكورة في التمرين ١٦.

١٨- استبدل صيغة التكرار في التمرين ١٦ بما يلي

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1} \ .$$

حيث أن p عدداً صحيحاً موجباً ثابتاً، أوصف سلوك المتتالية الناتجة $\{x_n\}$.

١٩- ارفق مع كل متتالية $a = \{\alpha_n\}$، التي تكون α_n هي 0 أو 2، العدد الحقيقي

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} \ .$$

برهن على أن المجموعة التي تضم جميع $x(a)$ هي بالضبط مجموعة كانتور المذكورة في الجزء ٢، ٤٤.

٢٠- افترض أن $\{p_n\}$ متتالية كوشية في الفضاء المتري X، وان بعض المتتاليات الجزئية $\{p_{n_i}\}$ تتقارب إلى النقطة $p \in X$. برهن على أن المتتالية بأكملها $\{p_n\}$ تتقارب إلى p.

٢١- برهن المناظرة الآتية للمبرهنة ٣، ١٠ (ب): إذا كانت $\{E_n\}$ متتالية لمجاميع مغلقة ومقيدة في الفضاء المتري التام X، وكانت $E_n \supset E_{n+1}$، و

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0 \text{،}$$

عندها فإن $\bigcap_1^{\infty} E_n$ تتألف من نقطه واحدة فقط.

٢٢- افترض أن X فضاءاً مترياً تاماً، وان $\{G_n\}$ متتالية لمجموعات مفتوحة كثيفة (مركزه) لـ X. برهن مبرهنة باير Baire، أو بالتحديد، أن $\bigcap_1^{\infty} G_n$ ليست خاليه. (في الحقيقة، أنها كثيفة في X). تلميح: أوجد سلسلة متقلصة من المناطق المجاورة E_n بحيث $\overline{E}_n \subset G_n$، وطبق التمرين ٢١.

٢٣- أفترض أن $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ متتاليتين كوشيتين في الفضاء المتري X. بَين أن المتتالية $\{d(p_n, q_n)\}$ تتقارب. *تلميح*: لكل n, m،

$$d(p_n, q_n) \le d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n) \text{؛}$$

يلي ذلك أن

$$\left| d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m) \right|$$

يكون صغيراً إذا كانت m و n كبيرتين.

٢٤- لتكن X فضاءا متريـــاً.

(أ) نطلق على المتتاليتين الكوشيتين $\{p_n\}$،$\{q_n\}$ في X بأنهما *متكافئتين* ***equivalent*** إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n\ ,q_n) = 0\ .$$

برهن على أن هذه العلاقة تكافؤ.

(ب) لتكن X^* المجموعة التي تضم جميع صفوف التكافؤ التي حصلنا عليها. إذا كانت، $P \in X^*\ ,\ Q \in X^*$، $\{p_n\} \in P$ ، $\{q_n\} \in Q$، عرف

$$\Delta(P,Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n\ ,q_n)\ ;$$

استنادا إلى التمرين ٢٣، فإن هذه الغاية موجودة. بين أن العدد $\Delta(P,Q)$ غير قابل للتغير إذا استبدلت $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ بمتتاليات مكافئة، وعندها فإن Δ هي دالة مسافة في X^*.

(ج) برهن أن الفضاء المتري X^* يكون تاماً.

(ء) لكل $p \in X$، يوجد هنالك متتالية كوشية جميع حدودها p ؛ لتكن P_p العنصر لـ X^* الذي يحتوي هذه المتتالية. برهن أن

$$\Delta(P_p\ ,P_q\ ) = d(p,q)$$

لجميع $p,q \in X$. بكلمة أخرى، أن التطبيق φ المعرف بـ $\varphi\ (p) = P_P$ هو مقياس **isometry** (أي تطبيق محافظ على الأبعاد) لـ X في X^*.

(هـ) برهن على أن $\varphi\ (X)$ تكون كثيفة في X^*، وبأن $\varphi\ (X) = X^*$ إذا كانت X تامة. استنادا إلى (د)، نستطيع أن نعين X و $\varphi\ (X)$ وبذلك نعتبر أن X مغمور **embedded** في الفضاء المتري التام X^*. يطلق على X^* *المتممة* ***completion*** لـ X.

٢٥- لتكن X الفضاء المتري الذي نقاطه الأعداد النسبية، بحيث $d(x,y) = |x-y|$ ما هو المتمم لهذا الفضاء ؟ (قارن بالتمرين ٢٤).

الفصل الرابع

الاستمــراريــة

- غايات الدوال
- الدوال المستمرة
- الاستمرارية والتراص
- الاستمرارية والترابط
- عدم الاستمرارية (التفاصل)
- الدوال الرتيبة
- الغايات اللانهائية و الغايات عند اللانهائية
- تمارين

الفصل الرابع
الاستمـــراريـــة
Continuity

تم تقديم مفهوم الدالة وبعض المصطلحات ذات العلاقة بها في التعريفين ٢، ١ و٢، ٢ وعلى الرغم من إننا سنتناول الدوال الحقيقية والمركبة بصورة رئيسية خلال الفصول القادمة (أي، الدوال التي تكون قيمتها أعدادا حقيقية أو عقدية) إلا أننا سنناقش أيضاً دوال القيم المتجهة (أي، الدوال التي تقع قيمتها في $\mathbb{R}^k$) والدوال التي تقع قيمتها في بعض الفضاءآت المترية العشوائية. بأي حال من الأحوال سوف لن تكون المبرهنات التي سنناقشها ضمن هذا الإطار العام اسهل إذا ما حددنا أنفسنا في التعامل فقط مع الدوال الحقيقية، على سبيل المثال، وفي الحقيقة فإن مسألة التخلص من الافتراضات الغير ضرورية وصياغة وبرهنة المبرهنات ضمن إطار عام ومناسب، تساهم في تسهيل وتوضيح الصورة بشكل كبير.

ستكون منطلقات التعريف لدوالنا هذه فضاءآت مترية أيضاً، والتي هي مناسبة جداً للعديد من الحالات.

غايات الدوال Limits Of Functions

٤، ١ تعريف: ليكن X وY فضائيين متريين ؛ نفترض أن $E \subset X$ ، f تطبيق E في Y، و p نقطة غاية لـــ E. إننا نكتب $f(x) \to q$ عندما $x \to p$ ، أو

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad (١)$$

إذا كانت هنالك نقطة $q \in Y$ تمتلك الخاصية الآتية: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \qquad (٢)$$

لجميع النقاط $x \in E$ والتي يكون فيها

$$0 < d_X(x, p) < \delta \ . \qquad (٣)$$

يشير الرمزان d_X و d_Y إلى المسافات في X و Y، على التوالي.

إذا تم استبدال X و / أو Y بخط حقيقي، مستوى مركب، أو ببعض الفضاءآت الإقليدية

R^k، فإن المسافتين d_X، d_Y سوف تستبدل بالطبع بقيم مطلقة، أو معيار بمتجهات مناسبة (راجع البند ٢، ١٦).

تجدر الملاحظة هنا إلى أن $p \in X$، لا يعني بالضرورة أن p هي نقطة من نقاط E في التعريف أعلاه. إضافة إلى ذلك، حتى إذا كانت $p \in E$، فإنه من الجائز جداً أن تكون $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$.

بالإمكان إعادة صياغة هذا التعريف بمصطلحات غايات المتتاليات:

٤، ٢ مبرهنة: *لتكن X, Y, E, f و p كما معرفة بالتعريف ٤، ١. عندها فإن*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \qquad (٤)$$

إذا و إذا فقط كانت

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \qquad (٥)$$

لكل متتالية $\{p_n\}$ في E بحيث أن

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p, \qquad p_n \neq p \qquad (٦)$$

البرهان: لنفترض أن (٤) تتحقق. نختار $\{p_n\}$ في E بحيث تحقق (٦). لنأخذ $\varepsilon > 0$. عندها يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث $d_Y(f(x),q) < \varepsilon$ إذا كانت $x \in E$ و $0 < d_X(x,p) < \delta$. أيضا، يوجد هناك N بحيث $n > N$ يؤدي إلى أن $0 < d_X(p_n,p) < \delta$. وذلك، لـ $n > N$، نحصل على $d_Y(f(p_n),q) < \varepsilon$، والتي تبين أن (٥) تتحقق.

وبالعكس، نفترض أن (٤) خاطئة. عندها يوجد هنالك بعض $\varepsilon > 0$ بحيث إنه لكل $\delta > 0$ يوجد هنالك نقطة $x \in E$ (*تعتمد على* δ) أن $d_Y(f(x),q) \geq \varepsilon$ ولكن $0 < d_X(x,p) < \delta$. بأخذ $\delta_n = 1/n (n = 1,2,3,\ldots)$، ولذلك نجد أن المتابعة في E تحقق (٦) بحيث أن (٥) تكون خاطئة.

نتيجة: *إذا كانت f تمتلك غاية في p، فإن هذه الغاية تكون وحيدة.*

وهذا يأتي من المبرهنتين ٢، ٣ (ب) و ٢، ٤.

٤، ٣ تعريف: لنفترض أن لدينا دالتين مركبتين، f و g، كلاهما معرفة في E. نقصد بـ

$f+g$ الدالة التي تعين لكل نقطة x في E العدد $f(x)+g(x)$. بنفس الطريقة نعين الفرق $f-g$، حاصل *الضرب* fg، وحاصل القسمة f/g للدالتين، أخذاً بنظر الاعتبار أن حاصل القسمة يتعين فقط في تلك النقاط x من E والتي يكون فيها $g(x)\neq 0$. إذا كانت f تعين لكل نقطة x من E بنفس العدد c، فإن f عندها تسمى دالة ثابتة، أو مجرد ثابتة، وعندها نكتب $f=c$. إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين، وكانت $f(x)\geq g(x)$ لكل $x\in E$، فإننا سنكتب أحيانا $f\geq g$، للاختصار.

بنفس الطريقة، إذا كانت $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ تطبيقان E في $\mathbf{R}^k$، فإننا نعرف $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ و $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ كما يلي:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x), \qquad (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x);$$

وإذا كان λ عدداً حقيقياً فإن، $(\lambda\mathbf{f})(x)=\lambda\mathbf{f}(x)$.

٤، ٤ مبرهنة: *لنفترض أن* $E\subset X$، *فضاءاً متريًا،* p *نقطة غاية لـــ* E، f *و* g *دالتين مركبتين في* E، *و*

$$\lim_{x\to p} f(x)=A, \quad \lim_{x\to p} g(x)=B$$

عندها فإن

(أ) $\lim_{x\to p}(f+g)(x)=A+B$؛

(ب) $\lim_{x\to p}(fg)(x)=AB$؛

(ج) $\lim_{x\to p}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{A}{B}$، *إذا كانت* $B\neq 0$.

البرهان: وفقاً للمبرهنة ٤، ٢، فإن هذه التأكيدات تتأتى مباشرة من الخواص المتشابهة للمتتاليات (مبرهنة ٣، ٣).

ملاحظة: إذا كانت $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ تطبيقان E في $\mathbf{R}^k$، فإن (أ) صحيحة أيضاً، و (ب) تصح كالآتي

(بَ) $\lim_{x\to p}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$

(قارن المبرهنة ٣، ٤).

الدوال المستمرة Continuous Functions

٤، ٥ تعريف: لنفترض أن X و Y فضائيين مترين، $E\subset X$ ، $p\in E$، و f تطبيق E في Y. عندها يقال لـــ f بأنها مستمرة في p إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد هنالك $\delta>0$ بحيث

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

لكل النقاط $x \in E$ والتي يكون عندها $d_X(x,p) < \delta$.

إذا كانت f مستمرة في كل نقطة من نقاط E، عندها يقال لـ f أنها **مستمرة في** ***E*** ***on continuous***.

يجب أن يلاحظ أن f يجب أن تكون معرفة في النقطة p لأجل أن تكون مستمرة في p. (قارن هذه الملاحظة مع الملاحظة التالية للتعريف ٤، ١).

إذا كانت p نقطة منعزلة لـ **isolated point of *E***، عندها فإن تعريفنا يؤدي إلى أن كل دالة f تمتلك E منطلقاً لتعريفها تكون مستمرة في p. وذلك لأنه نغض النظر عن أي $\varepsilon > 0$ نختارها، نستطيع أن نأخذ $\delta > 0$ بحيث أن النقطة الوحيدة $x \in E$ التي تحقق $d_X(x,p) < \delta$ هي $x = p$ ؛ عندها فإن

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

٤، ٦ مبرهنة: *في حالة التي قدمت في التعريف ٤، ٥، افترض أيضاً أن p هي نقطة غاية لـ E. عندها فإن f تكون مستمرة في p إذا وإذا فقط كان* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

البرهان: واضح جداً إذا قارنا التعريفين ٤، ١ و ٤، ٥.

نتطرق الآن إلى بناء الدوال. النص المختصر للمبرهنة الآتية هو أن الدالة المستمرة للدوال المستمرة تكون مستمرة.

٤، ٧ مبرهنة: *لنفترض أن X , Y , Z فضاءآت مترية، $E \subset X$, f تطبيق E في Y، g تطبيق مدى f، $f(E)$، في Z، و h هو تطبيق E في Z المعرف بـ*

$$h(x) = g(f(x)) \qquad (x \in E).$$

إذا كان f مستمرة في النقطة $p \in E$ وكانت g مستمرة في النقطة $f(p)$، عندها فإن h مستمرة في p.

نطلق على الدالة h بأنها **تركيب** ***composition*** أو (***the composite of d and g***).

وغالباً ما يستخدم الرمز

$$h = g \circ f$$

في هذا المجال.

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. بما أن g مستمرة في $f(p)$، يوجد هنالك $\eta > 0$ بحيث

$d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$ إذا كانت $d_Y(y, f(p)) < \eta$ و $y \in f(E)$.

بما أن f مستمرة في p، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث

$d_Y(f(x), f(p)) < \eta$ إذا كانت $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$.

ينتج عن ذلك أن

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$$

إذا كانت $d_X(x, p) < \delta$ و $x \in E$. لذلك فإن h تكون مستمرة في p.

٤ ، ٨ مبرهنة: *التطبيق f للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y تكون مستمرة في X إذا و إذا فقط كانت $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X لكل مجموعة مفتوحة V في Y.*

(تعرف الصور العكسية في التعريف ٢، ٢) تعتبر هذه خاصية مفيدة جداً للاستمرارية.

البرهان: لنفترض أن f مستمرة في X و V مجموعة مفتوحة في Y. أن علينا أن نبين أن كل نقطة من $f^{-1}(V)$ تكون نقطة داخلية لـــ $f^{-1}(V)$. لذلك، نفترض أن $p \in X$ و $f(p) \in V$. بما أن V مفتوحة، يوجد هنالك $\varepsilon > 0$ بحيث أن $y \in V$ إذا كانت $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$ ؛ وبما أن f مستمرة في p، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ إذا كانت $d_X(x, p) < \delta$. لذلك فإن $x \in f^{-1}(V)$ طالما أن $d_X(x, p) < \delta$.

وبالعكس، نفترض أن $f^{-1}(V)$ مفتوحة في X لكل مجموعة مفتوحة V في Y. نثبت $p \in X$ و $\varepsilon > 0$، لتكن V المجموعة التي تضم جميع الـــ $y \in Y$ بحيث $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. عندها فإن V تكون مفتوحة ؛ إذن $f^{-1}(V)$ مفتوحة ؛ إذن يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $x \in f^{-1}(V)$ طالما أن $d_X(p, x) < \delta$. ولكن إذا كانت $x \in f^{-1}(V)$، عندها فإن $f(x) \in V$، لذلك فإن $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. وهذا ينهي البرهان.

نتيجة: *التطبيق f للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y يكون مستمراً إذا و إذا فقط كان $f^{-1}(C)$ مغلقاً في X لكل مجموعة مغلقة C في Y.*

يستنتج هذا من المبرهنة، بما أن المجموعة تكون مغلقة إذا و إذا فقط كانت متممتها مفتوحة، و بما أن $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$ لكل $E \subset Y$.

نتحول الآن إلى دوال القيم العقدية والقيم المتجهة، و إلى الدوال المعرفة في المجموعات الجزئية لــ $\mathbf{R}^k$.

٤، ٩ مبرهنة: *لتكن f و g دالتين مركبتين مستمرتين في الفضاء المتري X. عندها يكون $f+g$ ، fg، و f/g مستمرين في X.*

في الحالة الأخيرة، يجب علينا بالطبع أن نفترض أن $g(x) \neq 0$، لجميع الــ $x \in X$.

البرهان: في النقاط المنعزلة لــ x لا يوجد هنالك شيء لبرهنته. أما في نقاط الغاية، فإن التعبير يستنتج من المبرهنات ٤، ٤ و ٤، ٦.

٤، ١٠ مبرهنة: (أ) *لتكن $f_1,\ldots,f_k$ دوال حقيقية في الفضاء المتري X، ولتكن $\mathbf{f}$ التطبيق لــ X في $\mathbf{R}^k$ المعرفة بــ*

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x),\ldots,f_k(x)) \qquad (x \in X); \tag{٧}$$

عندها فإن $\mathbf{f}$ تكون مستمرة إذا و إذا فقط كانت كل من الدوال $f_1,\ldots,f_k$ مستمرة.

(ب) *إذا كان $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ تطبيقان مستمران لــ X في $\mathbf{R}^k$، عندها فإن $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ & $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ تكون مستمرة في X.*

يطلق على الدوال $f_1,\ldots,f_k$ ***المكونات** لــ $\mathbf{f}$ components of **f***. لاحظ أن $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ يكونان تطبيقاً في $\mathbf{R}^k$، بينما $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ تكون دالة حقيقية في X.

البرهان: يستنتج الجزء (أ) من المتباينات

$$\left|f_j(x)-f_j(y)\right| \le \left|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(y)\right| = \left\{\sum_{i=1}^{k}\left|f_i(x)-f_i(y)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

بالنسبة لــ $j=1,\ldots,k$. يستنتج الجزء (ب) من (أ) و المبرهنة ٤، ٩.

٤، ١١ أمثلة: إذا كانت $x_1,\ldots,x_k$ الإحداثيات للنقطة $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$، الدوال ϕ_i معرفة بــ

$$\phi_i(\mathbf{x}) = x_i \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k) \tag{٨}$$

تكون مستمرة في $\mathbf{R}^k$، بما أن المتباينة

$$\left|\phi_i(\mathbf{x})-\phi_i(\mathbf{y})\right| \le \left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|$$

تبين بأننا قد نأخذ $\delta = \varepsilon$ في التعريف ٤، ٥. يطلق على الدوال ϕ_i أحياناً *الدوال الإحداثية*

.*coordinate functions*

تبين التطبيقات المتكررة للمبرهنة ٤، ٩ بأن كل أحادي الحد **monomial**

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \qquad (٩)$$

حيث أن $n_1, n_2, \dots, n_k$ أعداد صحيحة غير سالبة، يكون مستمراً في $\mathbf{R}^k$. نفس الشيء يصح على المضاعفات الثابتة لــ (٩)، نظراً لأنه من الواضح أن الثوابت مستمرة. يعقب ذلك أن كل متعددة الحدود P، التي تكون على شكل

$$P(\mathbf{x}) = \sum c_{n_1 \dots n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k), \qquad (١٠)$$

تكون مستمرة في $\mathbf{R}^k$. هنا تكون المعاملات $c_{n_1 \dots n_k}$ أعداد عقدية، $n_1, \dots, n_k$ أعداد صحيحة غير سالبة، والمجموع في (١٠) يمتلك حدود كثيرة منتهية.

إضافة لذلك، فإن كل دالة نسبية في $x_1, \dots, x_k$، أي أن، كل حاصل قسمة متعددات الحدود بالشكل (١٠)، تكون مستمرة في $\mathbf{R}^k$ طالما أن المقام لا يساوي صفر.

من متباينة المثلث، يستطيع المرء أن يلاحظ بسهولة أن

$$\big||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\big| \le |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k). \qquad (١١)$$

إذن يكون التطبيق $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|$ دالة حقيقية مستمرة في $\mathbf{R}^k$.

الآن إذا كانت $\mathbf{f}$ تطبيقاً مستمر من الفضاء المتري X إلى $\mathbf{R}^k$، وإذا كانت ϕ معرفة في X بالعلاقة $\phi(p) = |\mathbf{f}(p)|$، يعقب ذلك، استناداً إلى المبرهنة ٤، ٧، بأن ϕ تكون دالة حقيقية مستمرة في X.

٤، ١٢ ملاحظة: قمنا بتعريف رمز الاستمرارية للدوال المعرفة في المجموعة الجزئية E للفضاء المتري X. ولكن، المتمم لــ E في X لا تلعب أي دور مهما كان في هذا التعريف (لاحظ بأن الوضعية كانت تختلف بعض الشيء بالنسبة لغايات الدوال). طبقاً لذلك، فإننا لا نخسر أي شيء مهم بإهمالنا لمتمم المنطلق لــ f. أن هذا يعني بأنه ربما كان من المستحسن أن نتحدث عن التطبيق المستمر لفضاء متري معين في فضاء متري آخر، بدلاً من التطبيق للمجموعات الجزئية. أن هذا يبسط من تعبير وبراهين بعض المبرهنات. وقد استخدمنا بالفعل من المبدأ في المبرهنات من ٤، ٨ إلى ٤، ١٠، وسوف نستمر في البند الآتي بخصوص التراص.

الاستمرارية والتراص Continuity And Compactness

٤، ١٣ تعريف: يقال للتطبيق f للمجموعة E في R^k بأنه *مقيد bounded* إذا كان هنالك عدداً حقيقياً M بحيث أن $|f(x)| \le M$ لجميع $x \in E$.

٤، ١٤ مبرهنة: *لنفترض أن f تطبيق مستمر للفضاء المتري المتراص X في الفضاء المتري Y. عندها فإن $f(X)$ تكون متراصة.*

البرهان: لتكن $\{V_\alpha\}$ غطاءاً مفتوحاً لـ $f(X)$. بما أن f مستمرة، فإن المبرهنة ٤، ٨ تبين بأن كلاً من المجموعات $f^{-1}(V_\alpha)$ تكون مفتوحة. بما أن X متراصة، يوجد عدد كبير منتهي من الأسس أو الأدلة indices، لنقل $\alpha_1,\dots,\alpha_n$، بحيث

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}) \ . \qquad (١٢)$$

بما أن $f(f^{-1}(E)) \subset E$ لكل $E \subset Y$، فإن (١٢) تدل على أن

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n} \ . \qquad (١٣)$$

وهذا ينهي البرهان.

ملاحظة: استخدمنا العلاقة $f(f^{-1}(E)) \subset E$، نأخذه لـ $E \subset Y$. إذا كانت $E \subset X$، فإن $f^{-1}(f(E)) \supset E$ ؛ ليس بالضرورة أن تتحقق المعادلة في كلتا الحالتين.

سوف نستنتج الآن بعض النتائج للمبرهنة ٤، ١٤.

٤، ١٥ مبرهنة: *إذا كانت f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري المتراص X في R^k، عندها تكون $f(X)$ مغلقه ومقيدة. وهكذا فإن f تكون مقيدة.*

تنتج ذلك من المبرهنة ٢، ٤١. تكون النتيجة مهمة بشكل خاص عندما تكون f حقيقية:

٤، ١٦ مبرهنة: *لنفترض أن f دالة حقيقية مستمرة في الفضاء المتري المتراص X، و*

$$M = \sup_{p \in X} f(p) \ ، \quad m = \inf_{p \in X} f(p) \qquad (١٤)$$

عندها يوجد هنالك نقطتين $p,q \in X$ حيث أن $f(p) = M$ و $f(q) = m$.

الرمز في (١٤) يعني أن M هي القيد العلوي الأصغر للمجموعة التي تضم جميع الأعداد $f(p)$، حيث p تمتد خلال X، وان m القيد السفلي الأعظم لمجموعة الأعداد هذه.

من الممكن أيضا صياغة الاستنتاج بالشكل الآتي: *يوجد هنالك نقطتين* q, p في X بحيث *أن* $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ لجميع $x \in X$; أي أن f *تحرز قيمتها القصوى* (في p) وقيمتها الصغرى (في q).

البرهان: استناداً للمبرهنة ٤، ١٥، فإن $f(x)$ مجموعة مغلقه ومقيدة من الأعداد الحقيقية ؛ إذن $f(x)$

تحتوي على

$$M = \sup f(X) \text{ و } m = \inf f(X)$$

استنادا للمبرهنة ٢، ٢٨.

٤، ١٧ مبرهنة: *لنفترض أن f تطبيق 1-1 مستمر للفضاء المتري المتراص X شاملاً الفضاء المتري Y. عندها فإن التطبيق العكسي f^{-1} المعرف على Y بـ*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X)$$

يكون تطبيقاً مستمراً لـ Y في X.

البرهان: بتطبيق المبرهنة ٤، ٨ على f^{-1} بدلاً من f، نلاحظ بأنه يكفي البرهنة على أن $f(V)$ تكون مجموعة مفتوحة في Y لكل مجموعة مفتوحة V في X. عين مثل هذه المجموعة V.

يكون المتمم V^c لـ V مغلقاً في X، إذن يكون متراصاً (المبرهنة ٢، ٣٥)، إذن $f(V^c)$ مجموعة جزئية متراصة لـ Y (المبرهنة ٤، ١٤) وكذلك مغلقه في Y (المبرهنة ٢، ٣٤). بما أن f هي 1-1 وشاملاً، $f(V)$ هي المتممة لـ $f(V^c)$. إذن $f(V)$ مفتوحة.

٤، ١٨ تعريف: لتكن f تطبيقاً للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، نقول بأن f تكون *مستمرة بانتظام* ***continuous uniformly*** في X إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \qquad (١٥)$$

لجميع p , q في X التي يكون فيها $d_X(p,q) < \delta$.

لنناقش الفروق بين مفهومي الاستمرارية والاستمرارية المنتظمة. أولا، أن الاستمرارية

المنتظمة هي خاصية لدالة في مجموعة، بينما من الممكن تعيين الاستمرارية في نقطه واحدة. لذلك فإن السؤال عما إذا كانت دالة ما مستمرة بانتظام في نقطه معينه يعتبر سؤالاً عديم المعنى. ثانياً، إذا كانت f مستمرة في X، عندها فإنه من الممكن إيجاد، لكل $\varepsilon > 0$ ولكل نقطه p من X، العدد $\delta > 0$ الذي يمتلك الخاصية المذكورة في التعريف ٤، ٥. أن هذا الـ δ يعتمد على كلٍ من ε و p. ولكن، إذا كانت f، مستمرة بانتظام في X، عندها فإنه من الممكن، لكل $\varepsilon > 0$، إيجاد عدد *واحد* $\delta > 0$ والذي يعوض عن جميع نقاط p في X.

من الواضح، أن كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة. أن كون هذين المفهومين متكافئين في المجموعات المتراصة هو موضوع المبرهنة القادمة.

٤، ١٩ مبرهنة: *لتكن f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري المتراص X في الفضاء المتري Y، عندها فإن f تكون مستمرة بانتظام في X.*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. بما أن f مستمرة، بـإمكاننا أن نرافق لكل نقطه $p \in X$ عدد اً موجباً $\phi(p)$ بحيث أن

$$d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{يؤدي إلى} \quad d_X(p,q) < \phi(p) \quad ، \quad q \in X. \qquad (١٦)$$

لتكن $J(p)$ المجموعة التي تضم جميع $q \in X$ والتي يكون فيها

$$d_X(p,q) < \frac{1}{2}\phi(p). \qquad (١٧)$$

بما أن $p \in J(p)$، فإن طائفة جميع المجموعات $J(p)$ تكون غطاء اً مفتوحـاً لـ X؛ وبما أن X متراص، يوجد هنالك مجموعة منتهية من النقاط في X، $p_1, \ldots, p_n$ بحيث أن

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \qquad (١٨)$$

نضع

$$\delta = \frac{1}{2}\min[\phi(p_1), \ldots, \phi(p_n)]. \qquad (١٩)$$

عندها فإن $\delta > 0$. (هذه إحدى النقاط التي تكون فيها منتهية الغطاء، المتضمن في تعريف التراص، مهمة جد اً. أن القيمة الدنيا لمجموعة منتهية من الأعداد الموجبة تكون موجبة، بينما من الجائز جداً أن يكون الـ اعظم قيد أدنى inf لمجموعة غير منتهية من الأعداد الموجبة يساوي 0 صفراً).

الآن لتكن q و p نقطتين من X، بحيث أن $d_X(p,q)<\delta$. حسب (١٨)، يوجد هنالك عدداً صحيحاً m، $1\le m\le n$، بحيث أن $p\in J(p_m)$ ؛ إذن

$$d_X(p,p_m)<\frac{1}{2}\phi(p_m), \tag{٢٠}$$

ولدينا أيضاً

$$d_X(q,p_m)\le d_X(p,q)+d_X(p,p_m)<\delta+\frac{1}{2}\phi(p_m)\le\phi(p_m).$$

أخيراً، تبعاً لذلك تُبين (١٦) أن

$$d_Y(f(p),f(q))\le d_Y(f(p),f(p_m))+d_Y(f(q),f(p_m))<\varepsilon.$$

وهذا ينهي البرهان.

يوجد هنالك برهان بديل لهذه المبرهنة مذكور في التمرين ١٠.

نستمر الآن لنبين أن التراص هو افتراض أساسي في المبرهنات ٤، ١٤، ٤، ١٥، ٤، ١٦ و ٤، ١٩.

٤، ٢٠ مبرهنة: *لتكن E مجموعة غير متراصة في $\mathbb{R}^1$. عندها فإن*

(أ) *يوجد هنالك دالة مستمرة في E ليست مقيدة* ***not bounded***؛

(ب) *يوجد هنالك دالة مستمرة ومقيدة في E لا تمتلك قيمه عظمى إضافة لذلك، إذا كانت E مقيدة، فإن*

(ج) *يوجد هنالك دالة مستمرة في E ليست مستمرة بانتظام.*

البرهان: لنفترض أولا أن E *مقيدة*، لذلك يوجد هنالك نقطة غاية x_0 لـ E والتي هي ليست نقطه في E. لاحظ

$$f(x)=\frac{1}{x-x_0}\qquad (x\in E) \tag{٢١}$$

إن هذه الدالة مستمرة في E (المبرهنة ٤، ٩) ، ولكنها من الواضح ليست *مقيدة* . لبرهنة أن (٢١) ليست مستمرة بانتظام، لتكن $\varepsilon>0$ و $\delta>0$ عشوائيتين، ونختار نقطه $x\in E$ بحيث أن $|x-x_0|<\delta$. بأخذ t قريبة بما فيها الكفاية لـ x_0، فإننا نستطيع أن نأخذ عندها الفرق $|f(t)-f(x)|$ اكبر من ε، على الرغم من أن $|t-x|<\delta$. بما أن هذا صحيح لكل

$\delta > 0$، إذن f ليست مستمرة بانتظام في E.

إن الدالة g التي على شكل

$$g(x) = \frac{1}{1+(x+x_0)^2} \qquad (x \in E) \qquad (٢٢)$$

تكون مستمرة في E، و*مقيدة*، بما أن $0 < g(x) < 1$. فإنه من الواضح أن

$$\sup_{x\in E} g(x) = 1 ,$$

بينما أن $g(x) < 1$ لكل $x \in E$. لذلك فإن g لا تمتلك قيمه عظمى في E.

بعد أن برهنا المبرهنة بالنسبة للمجموعات المقيدة E، لنفترض الآن أن E غير *مقيدة*. عندها فإن $f(x) = x$ يبرهن (أ)، بينما

$$h(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad (x \in E) \qquad (٢٣)$$

تبرهن (ب)، نظراً لأن

$$\sup_{x\in E} h(x) = 1$$

و $h(x) < 1$ لجميع $x \in E$.

إن التوكيد (ج) سيصبح خاطئاً إذا حذفت التقييد **boundedness** من الافتراض. وذلك لأنه، لتكن E المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة. عندها فإن كل دالة معرفة في E تكون مستمرة بانتظام في E. لرؤية ذلك، فإننا نحتاج فقط إلى وضع $\delta < 1$ في التعريف ٤، ١٨.

نختتم هذا البند ببيان أن التراص يكون أساسيا أيضا في المبرهنة ٤، ١٧.

٤، ٢١ مثال: لتكن X الفترة النصف - مفتوحة $[0,2\pi)$ في الخط الحقيقي، ولتكن **f** التطبيق لـــ X شاملاً الدائرة Y التي تتألف من جميع النقاط التي تبعد عن المركز بـــ **1**، والتي على شكل $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$ (٢٤)

سوف تبرهن استمرارية الدالتين المثلثين، الجيب تمام والجيب، إضافة إلى خواصهما الدورية، في الفصل الثامن. تبين هذه النتائج أن **f** تكون تطبيقاً **1-1** مستمراً لـــ X شاملاً Y.

ولكن، التطبيق المعاكس (الذي يتواجد، نظراً لأن **f** هي **1- 1** وشاملاً) يخفق أن يكون مستمراً في النقطة $\mathbf{f}(0) = (1,0)$. بالطبع أن، X ليست متراصة في هذا المثال. (ربما من الجدير بالذكر

أن نشير هنا إلى أن f^{-1} تخفق في أن تكون مستمرة على الرغم من كون Y متراصة !)

الاستمرارية والترابط Continuity And Connectedness

٤، ٢٢ مبرهنة: *إذا كانت f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، وكانت E مجموعة جزئية مترابطة لـX، عندها فإن $f(E)$ تكون مترابطة.*

البرهان: لنفترض، على العكس تماماً، أن $f(E) = A \cup B$، حيث أن A و B مجموعتان جزئيتان متباعدتان غير خاليه لـ Y. نضع $G = E \cap f^{-1}(A)$، $H = E \cap f^{-1}(B)$. عندها فإن $E = G \cup H$، ولا تكون G ولا H خاليه. بما أن $A \subset \overline{A}$ (الانغلاق لـ A)، لدينا $G \subset f^{-1}(\overline{A})$، تكون المجموعة الأخيرة مغلقه، لأن f مستمرة ؛ إذن $\overline{G} \subset f^{-1}(\overline{A})$. ينتج عن ذلك أن $f(\overline{G}) \subset \overline{A}$. بما أن $f(H) = B$ و $\overline{A} \cap B$ خاليه، نستنتج من ذلك أن $\overline{G} \cap H$ خالية.

بنفس الطريقة نبين أن $G \cap \overline{H}$ فارغة. لذلك فإن G و H متباعدين. أن هذا غير ممكن إذا كانت E مترابطة.

٤، ٢٣ مبرهنة: *لتكن f دالة حقيقية مستمرة في الفترة $[a,b]$. إذا كانت $f(a) < f(b)$ وكانت c عدداً بحيث أن $f(a) < c < f(b)$، عندها يوجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ بحيث أن $f(x) = c$.*

وبالطبع فإن، نفس النتيجة تتحقق، إذا كانت $f(a) > f(b)$. بصوره غير دقيقه، تفيد هذه المبرهنة بأن الدالة الحقيقية المستمرة تنتحل جميع القيم المتوسطة في الفترة.

البرهان: استناداً للمبرهنة ٢، ٤٧، تكون $[a,b]$ مترابطة ؛ إذن تبين المبرهنة ٤، ٢٢ بأن $f([a,b])$ تكون مجموعة جزئية مترابطة لـ $\mathbf{R}^1$، ويستنتج المطلوب باستخدام المبرهنة ٢، ٤٧ مره ثانية.

٤، ٢٤ ملاحظة للمرحلة الأولى، ربما يبدو أن المبرهنة ٤، ٢٣ تمتلك معكوساً. أي انه، ربما يفكر البعض بأنه لأي نقطتين $x_1 < x_2$ ولأي عدد c بين $f(x_1)$ و $f(x_2)$ يوجد هنالك نقطه x في (x_1, x_2) بحيث أن $f(x) = c$، عندها فإن f يجب أن تكون مستمرة.

بالإمكان استنتاج عدم صحة هذه الفكرة من التمرين ٤، ٢٧ (د).

عدم الاستمرارية (التفاصل) Discontinuities

إذا كانت x نقطة في منطلق تعريف الدالة f الذي تكون فيه f غير مستمرة، فإننا نقول أن f غير مستمرة (منفصلة) في x وان f تمتلك عدم استمرارية في x. إذا كانت f معرفة في فترة أو على قطعة، فإنه من الشائع تقسيم عدم الاستمرارية إلى نوعين. قبل أن نقدم هذا التصنيف، يتوجب علينا أن نعرف الغايتين اليمنى واليسرى لـ f في x واللتين يرمز لهما بـ $f(x+)$ و $f(x-)$، على التوالي.

٤، ٢٥ تعريف: لتكن f معرفة في (a,b). تأمل أي نقطه x بحيث أن $a \le x < b$. إننا نكتب

$$f(x+) = q$$

إذا كانت $f(t_n) \to q$ عندما $n \to \infty$، لجميع المتتاليات $\{t_n\}$ في (x,b) بحيث أن $t_n \to x$. وللحصول على تعريف $f(x-)$، بالنسبة لـ $a < x \le b$، فإننا نحدد تعاملنا مع المتتاليات $\{t_n\}$ في (a,x).

من الواضح أن لكل نقطه x من (a,b)، يتواجد $\lim\limits_{t \to x} f(t)$ إذا وإذا فقط كان

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t \to x} f(t)$$

٤، ٢٦ تعريف: لتكن f معرفة في (a,b). إذا كانت f غير مستمرة في النقطة x discontinues، وكانت $f(x-)$ و $f(x+)$ موجدتين، عندها يقال بأن f تمتلك عدم استمرارية من النوع الأول *first kind* أو عدم الاستمرارية البسيطة *simple discontinues*، في x. أما الحالات الأخرى من عدم الاستمرارية فيقال بأنها من النوع الثاني *second kind*.

هنالك طريقتان تمتلك بموجبهما الدالة عدم استمرارية بسيطة: أما أن تكون $f(x+) \ne f(x-)$ [وعندها تكون قيمه $f(x)$ عديمة الأهمية]، أو أن تكون $f(x+) = f(x-) \ne f(x)$.

٤، ٢٧ أمثلة:

(أ) عرف

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\text{نسبي } x), \\ 0 & (\text{غير نسبي } x). \end{cases}$$

عندها فإن f تمتلك عدم استمرارية من النوع الثاني عند كل نقطه x، وذلك لعدم وجود $f(x+)$ ولا $f(x-)$.

(ب) عرف

$$f(x)=\begin{cases} x & (\text{نسبي } x), \\ 0 & (\text{غير نسبي } x). \end{cases}$$

عندها تكون f مستمرة في $x = 0$ وتمتلك عدم استمرارية من النوع الثاني في كل نقطه أخرى.

(ج) عرف

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-3<x<-2), \\ -x-2 & (-2\le x<0), \\ x+2 & (0\le x<1). \end{cases}$$

عندها فإن f تمتلك عدم استمرارية بسيطة في $x = 0$ و تكون مستمرة في كل نقطة أخرى من $(-3,1)$.

(د) عرف

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0), \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

بما أنه لا توجد $f(0+)$ ولا $f(0-)$، فإن f تمتلك عدم استمرارية من النوع الثاني في $x = 0$. لم نقم لحد الآن بـإثبات أن $\sin x$ دالة مستمرة. إذا افترضنا هذه النتيجة في الوقت الحاضر، فإن المبرهنة ٤، ٧ تدل على أن f تكون مستمرة عند كل نقطه $x \ne 0$.

الدوال الرتيبة Monotonic Functions

نقوم الآن بدراسة تلك الدوال التي لا تتناقص أبدا (أولا تتزايد أبدا) عند قطعة معطاة.

٤، ٢٨ تعريف: لتكن f حقيقية في (a,b). عندها يقال أن f *متزايدة ترتيبياً* *monotonically increasing* في (a,b) إذا كانت $a<x<y<b$ تؤدي إلى أن $f(x)\le f(y)$. إذا تم قلب المتباينة الأخيرة، فإننا نحصل على تعريف الدالة *المتناقصة ترتيبياً* *monotonically decreasing* طَبقة الدوال الرتيبة تشمل كل من الدوال المتزايدة والمتناقصة.

٤، ٢٩ مبرهنة: *لتكن f متزايدة ترتيبياً في (a,b). عندها فإن تتواجد $f(x+)$ و $f(x-)$*
عند كل نقطه من x من (a,b). بشكل أدق

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \le f(x) \le f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) \quad (٢٥)$$

إضافة لذلك، إذا كانت $a < x < y < b$، فإن

$$f(x+) \le f(y-) \quad (٢٦)$$

من الواضح أن نتائج مماثلة تتحقق بالنسبة للدوال المتناقصة ترتيبياً.

البرهان: استناداً إلى الافتراض، فإن مجموعة الأعداد $f(t)$، حيث $a < t < x$، تكون مقيدة من الأعلى بالعدد $f(x)$، وذلك فإنها تمتلك قيداً علوياً اصغر والذي سنرمز له بالحرف A. من الواضح أن $A \le f(x)$. يتوجب علينا أن نبين أن $A = f(x-)$.

لنأخذ $\varepsilon > 0$. نستنتج من تعريف A كقيد علوي اصغر بأنه يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $a < x - \delta < x$ و

$$A - \varepsilon < f(x-\delta) \le A \quad (٢٧)$$

بما أن f رتيبة، فإن لدينا

$$f(x-\delta) \le f(t) \le A \qquad (x-\delta < t < x) \quad (٢٨)$$

بجمع (٢٧) و(٢٨)، نلاحظ بأن

$$|f(t) - A| < \varepsilon \qquad (x-\delta < t < x)$$

إذن $f(x-) = A$.

يبرهن القسم الثاني من (٢٥) بنفس الطريقة بالضبط.

الخطوة التالية، إذا كانت $a < x < y < b$، فإننا نلاحظ من (٢٥) بأن

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t) \quad (٢٩)$$

يتم الحصول على المساواة الأخيرة بتطبيق (٢٥) على $(a\ ,\ y)$ بدلاً من $(a\ ,\ b)$. بنفس الطريقة، فإن

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t) \quad (٣٠)$$

إن مقارنة (٢٩) و (٣٠) تعطينا (٢٦).

نتيجة: *الدوال الرتيبة لا تكون غير مستمرة من النوع الثاني.*

هذه النتيجة تبين أن كل دالة رتيبة غير مستمرة في مجموعة النقاط القابلة للعد على الأكثر. عوضاً عن أن نلجأ إلى المبرهنة العامة المقدم برهانها في التمرين ١٧، فإننا نعمم هنا برهاناً بسيطاً ينطبق على الدوال الرتيبة.

٤، ٣٠ مبرهنة: *لتكن f رتيبة في $(a\ ,\ b)$. عندها فإن مجموعة نقاط $(a\ ,\ b)$ التي تكون عندها f غير مستمرة، تكون على الأكثر قابلة للعد.*

البرهان: لنفترض، لأجل المحدودية، أن f متزايدة، ولتكن E مجموعة النقاط التي تكون عندها f غير مستمرة.

لكل نقطة x من E نرفق عدداً نسبياً $r\ (x)$ بحيث أن

$$f(x-)<r(x)<f(x+)\ .$$

بما أن $x_1<x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1+)\le f(x_2-)$، نلاحظ أن $r(x_1)\neq r(x_2)$ إذا كانت $x_1\neq x_2$.

وبهذا نكون قد كونا تراسل 1-1 بين المجموعة E والمجموعة الجزئية لمجموعة الأعداد النسبية. وكما نعرف، فإن الأخير، قد يكون قابل للعد.

٤، ٣١ ملاحظة: يجب الإشارة هنا إلى أن عدم استمرارية الدوال الرتيبة ليس بالضرورة أن يكون منعزلاً. في الحقيقة، لنأخذ أي مجموعة جزئية قابلة للعد E لـــ (a,b)، والتي حتى من الممكن أن تكون مركزه، نستطيع أن نكون الدالة f، التي تكون رتيبة في (a,b)، غير مستمرة عند كل نقطة من نقاط E وليس عند أية نقطه أخرى من (a,b).

لبيان ذلك، لنرتب جميع نقاط E في متتالية الأعداد الموجبة $\{x_n\}$، $n=1,2,3,\ldots$. لتكن $\{c_n\}$ متتالية الأعداد الموجبة بحيث أن $\sum c_n$ تتقارب. نعرف

$$f(x)=\sum_{x_n<x}c_n \qquad (a<x<b) \qquad (٣١)$$

يفهم الجمع كالتالي: الجمع لتلك الأسس n التي يكون عندها $x_n<x$. إذا لم تكن هنالك أي نقطه x_n إلى اليسار من x فإن المجموع يكون فارغاً ؛ ووفقاً للعرف المألوف، فإننا نعرفه بأنه يكون صفراً. بما أن (٣١) تتقارب بصورة مطلقة، لذلك فإن طبيعة ترتيب الحدود ليست مهمة.

نترك برهنة الخصائص الآتية لـ f إلى القارئ:

(أ) تكون f متزايدة ترتيبياً في (a,b) ؛

(ب) تكون f غير مستمرة عند جميع نقاط E ؛ في الحقيقة أن،

$$f(x_n+)-f(x_n-)=c_n \ .$$

(ج) تكون f مستمرة عند كل النقاط الأخرى لـ (a,b).

بالإضافة لذلك، ليس من الصعب أن نلاحظ $f(x-)=f(x)$ عند جميع نقاط (a,b). إذا كانت أي دالة تحقق هذا الشرط، فإننا نقول أن f *مستمرة من اليسار* *continuous from the left*. إذا اخذ الجمع في (٣١) فوق جميع الأسس n التي يكون عندها $x_n \le x$، فسيكون عندها $f(x+)=f(x)$ عن جميع النقاط (a,b) ؛ أي أن تكون، f *مستمرة من اليمين* *continuous from the right*.

من الممكن تعريف مثل هذه الدوال بطريقه أخرى ؛ وكمثال على ذلك نشير إلى المبرهنة ٦، ١٦.

الغايات اللانهائية والغايات عند اللانهائية

Infinite Limits And Limits At Infinity

بغية التمكن من العمل ضمن نظام الأعداد الحقيقية الموسع، نقوم الآن بتوسيع مجال التعريف ٤، ١، وذلك بإعادة صياغته وفق حدود الجوار (المناطق المجاورة).

لأي عدد حقيقي x، قمنا بتحديد الجوار لـ x لتكون القطعة $(x-\delta, x+\delta)$.

٤، ٣٢ تعريف: لأي عدد حقيقي c، تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث أن $x>c$ "*جوار المنطقة المجاورة لـ* $+\infty$ " وهي تكتب كالآتي: $(c,+\infty)$. وبنفس الطريقة، فإن المجموعة $(-\infty,c)$ هي " *جوار المنطقة المجاورة لـ* $-\infty$ ".

٤، ٣٣ تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة في E. نقول بأن

$$f(t)\to A, \qquad \text{عندها} \qquad t\to x$$

حيث تقع A و x في النظام الموسع للأعداد الحقيقية، إذا كان لكل جوار U لـ A يوجد هنالك جوار V لـ x بحيث أن $V\cap E$ ليست خاليه، وبحيث أن $f(t)\in U$ لجميع

$t \in V \cap E$ ، $t \neq x$.

إن ملاحظة وجيزة تبين أن هذا يتطابق مع التعريف ٤، ١ عندما تكون A و x عددين حقيقين.

النظير المماثل للمبرهنة ٤، ٤ يتحقق أيضا، ولا يقدم برهان ذلك أي شئ جديد. سوف نقوم بتقديمه لغرض تكامل الموضوع.

٤، ٣٤ مبرهنة: *لتكن f و g معرفة في E. لنفترض أن*

$$f(t) \to A \quad ، \quad g(t) \to B \qquad \textit{عندما} \qquad t \to x$$

عندها فإن

(أ) $f(t) \to A'$ *تدل على أن* $A' = A$.

(ب) $(f+g)(t) \to A+B$،

(ج) $(fg)(t) \to AB$،

(د) $(f/g)(t) \to A/B$،

شريطة أن تكون العناصر اليمنى لـ (ب)، (ج)، و(د) معرفة.

لاحظ بأن $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $A/0$ ليست معرفة (راجع التعريف ١، ٢٣).

تمارين EXERCISES

١– افترض أن f دالة حقيقية معرفة في R^1 والتي تحقق

$$\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)-f(x-h)\right]=0$$

لكل R^1 x. هل يدل ذلك على أن f مستمرة ؟

٢– إذا كانت f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، برهن على أن

$$f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$$

لكل مجموعة $E\subset X$. (نرمز $\overline{E}$ إلى انغلاق E). بين، بمثال، أن $f(\overline{E})$ لا يمكن أن تكون مجموعة جزئية فعلية لـــ $\overline{f(E)}$.

٣– لتكن f دالة حقيقية مستمرة في الفضاء المتري X. لتكن $Z(f)$ (المجموعة الصفرية لـــ f) مجموعة جميع النقاط $p\in X$ التي يكون عندها $f(p)=o$. برهن على أن $Z(f)$ تكون مغلقة.

٤– لتكن f و g تطبيقان مستمران للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y، ولتكن E مجموعة جزئية كثيفة لـــ X. برهن على أن $f(E)$ تكون كثيفة في $f(X)$. إذا كانت $g(p)=f(p)$ لجميع $p\in E$، برهن على أن $g(p)=f(p)$ لجميع $p\in X$. (بكلمة أخرى، يتحدد التطبيق المستمر بأقيامه في المجموعة الجزئية الكثيفة ومنطلقها).

٥– إذا كانت f دالة حقيقية ومستمرة معرفة في المجموعة المغلقة $E\subset R^1$، برهن على انه يوجد هنالك دوال حقيقية مستمرة g في R^1 بحيث أن $g(x)=f(x)$ لجميع $x\in E$. (دوالاً مثل هذه الـــ g تسمى الامتدادات المستمرة لـــ f *continues extensions of* f من E إلى R^1. بين أن هذه النتيجة تكون خاطئة إذا حذفنا كلمة "مغلقة". وسع النتيجة لتشمل دوال القيم المتجهة. تلميح: ليكن الرسم البياني لـــ g خطاً مستقيماً في كل القطعات التي تشكل المتمم لـــ E (قارن مع التمرين ٢٩، الفصل الثاني). تبقى النتيجة صحيحة إذا قمنا باستبدال R^1 بأي فضاء متري، ولكن برهنة ذلك ليست بتلك السهولة.

٦– إذا كانت f معرفة في E، الرسم البياني لـــ f هو مجموعة النقاط $(x,f(x))$، بالنسبة لـــ $x\in E$. بشكل خاص، إذا كانت E مجموعة من الأعداد الحقيقية، وكانت قيم f

حقيقية، فإن الرسم البياني لـــ f هو المجموعة الجزئية للمستوي.

افترض أن E متراصة، وبرهن أن f تكون مستمرة في E إذا وإذا فقط كان رسمها البياني متراص.

٧- إذا كانت $E \subset X$ وكانت f دالة معرفة في X، فإن التقييد لـــ f في E the restriction of f on E هو الدالة g التي يكون منطلق تعريفها هو E بحيث أن $g(p) = f(p)$ بالنسبة لـــ $p \in E$. عرف f و g في $\mathbb{R}^2$ بما يلي:

$$f(0,0) = g(0,0) = 0 \ , \ f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^4)} \ , \ g(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2 + y^6)}$$

إذا كانت $(x,y) \neq (0,0)$. برهن على أن f تكون مقيدة في $\mathbb{R}^2$، وان g تكون غير مقيدة في كل جوار لـــ $(0,0)$، وان f غير مستمرة في $(0,0)$ ؛على الرغم من ذلك، فإن المضيقات restrictions لكل f و g لكل خط مستقيم في $\mathbb{R}^2$ تكون مستمرة !

٨- لتكن f دالة حقيقية مستمرة بانتظام في المجموعة المقيدة E في $\mathbb{R}^1$. برهن على أن f تكون مقيدة في E.

بين أن هذا الاستنتاج يكون خاطئاً إذا حذفت تقييد E من الافتراض.

٩- بين أن شرط تعريف الاستمرارية المنتظمة يمكن أن يصاغ بالشكل الآتي، بمصطلحات أقطار المجموعات: لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $\text{diam} f(E) < \varepsilon$ لجميع $E \subset X$ بـ $\text{diam} E < \delta$.

١٠- اكمل تفاصيل البرهان البديل الآتي للمبرهنة ٤، ١٩ : إذا كانت f ليست مستمرة بانتظام، عندها لبعض $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك متتاليتين $\{p_n\}, \{q_n\}$ في X بحيث أن $d_X(p_n, q_n) \to 0$ لكن $d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$. استخدم المبرهنة ٢، ٣٧ للحصول على تناقض.

١١- أفترض أن f تطبيقاً مستمراً بانتظام للفضاء المتري X في الفضاء المتري Y برهن أن $\{f(x_n)\}$ تكون متتالية كوشي في Y لكل متتالية كوشية في X. استخدم هذه النتيجة لتقدير برهانا بديلاً للمبرهنة المنصوص في التمرين ١٣.

١٢- تكون الدالة المستمرة بانتظام لداله مستمرة بانتظام، مستمرة بانتظام. اكتب هذا بشكل أكثر دقة وبرهنة.

١٣- لتكن E مجموعة جزئية مركزه في الفضاء المتري X، ولتكن f دالة حقيقية مستمرة بانتظام معرفة في E. برهن على أن f تمتلك امتداداً مستمراً من E إلى X. (راجع التمرين ٥ بالنسبة للاصطلاحات). (تتأتى الوحدانية من التمرين ٤). تلميح: لكل $p \in X$ ولكل عدد صحيح موجب n، لتكن $V_n(p)$ مجموعة جميع $q \in E$ بـ $d(p,q) < 1/n$. استخدم التمرين ٩ لتبين أن تقاطع الانغلاقات للمجاميع $f(V_1(p), f(V_2(p),\ldots,$ يتألف من نقطه واحدة، لنقل $g(p)$، من R^1.

برهن على أن الدالة g المعرفة بهذا الشكل في X هي الامتداد المطلوب لـ f.

هل من الممكن استبدال مدى الفضاء R^1 بـ R^k؟ بأي فضاء متري متراص ؟بأي فضاء متري تام ؟بأي فضاء متري ؟

١٤- لتكن $I = [0,1]$ وحدة الفترة المغلقة. افترض أن f هي تطبيق مستمر لـ I في I برهن على أن $f(x) = x$ لواحدة على الأقل من $x \in I$.

١٥- يسمى التطبيق X في Y مفتوحاً *open* إذا كانت $f(V)$ مجموعة مفتوحة في Y كلما كانت V مجموعة مفتوحة في X.

برهن على أن كل تطبيق مفتوح ومستمر لـ R^1 في R^1 يكون رتيباً.

١٦- لتكن $[x]$ ترمز إلى اكبر الأعداد الصحيحة الموجودة في x، أي أن، $[x]$ هي العدد الصحيح بحيث أن $x-1 < [x] \le x$، ولتكن $(x) = x - [x]$ ترمز إلى الجزء الكسري من x. ماهية الاستمراريات التي تمتلكها الدالتين $[x]$ و (x) ؟

١٧- لتكن f دالة حقيقية معرفة في (a,b). برهن على أن مجموعة النقاط التي تمتلك فيها f استمرارية بسيطة تكون قابلة للعد على الأكثر. *تلميح:* لتكن E المجموعة التي $f(x-) < f(x+)$. مع كل نقطة x من E، ارفق الثلاثي (p,q,r) للأعداد النسبية بحيث أن

(أ) $f(x-) < p < f(x+)$،

(ب) تدل $a < q < t < x$ على أن $f(t) < p$،

(ج) تدل $x < t < r < b$ على أن $f(t) > p$.

إن المجموعة لجميع مثل هذه الثلاثيات تكون قابلة للعد. بين أن كل ثلاثي كهذا يكون

مترافقاً مع نقطه واحدة على الأكثر لـ E. تناول بنفس الطريقة مع الأنواع المختلفة الأخرى من الاستمرارية البسيطة.

١٨- يمكن كتابة كل عدد نسبي x على شكل $x = m/n$ حيث $n > 0$, n, m عددين صحيحين بدون أي قاسم مشترك. عندما تكون $x = 0$, نأخذ $n = 1$ لاحظ الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}^1$ بواسطة:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{غير نسبي } x), \\ \dfrac{1}{n} \cdot & (x = \dfrac{m}{n}) \end{cases}$$

برهن على أن f تكون مستمرة عند كل نقطه غير نسبية، وبأن x تمتلك عدم استمرارية بسيطة عند كل نقطه نسبية.

١٩- افترض أن f دالة حقيقية بمنطلق التي تمتلك خاصية القيمة المتوسطة: إذا كانت $f(a) < c < f(b)$، عندها فإن $f(x) = c$ لبعض x بين a و b. افترض أيضا، أنه لكل عدد نسبي r، تكون مجموعة جميع x بحيث $f(x) = r$ مغلقة.

برهن أن f تكون مستمرة.

تلميح: إذا كانت $x_n \to x_0$ لكن $f(x) > r > f(x_0)$ لبعض r وجميع n، فإن $f(t_n) = r$ لبعض t_n بين x_0 و x_n؛ لذلك فإن $t_n \to x_0$. أوجد تناقض.

(ان جي. فاين، امريكن ماث الشهرية، مجلد ٧٣، ١٩٦٦، صفحه ٧٨٢).

(N. J. Fine, *Amer. Math. Monthly*, vol. 73, 1966, p. 782).

٢٠- إذا كانت E مجموعة جزئية غير خاليه في الفضاء المتري X، عرف المسافة بين $x \in X$ إلى E بواسطة

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z) \ .$$

(أ) برهن على أن $\rho_E(x) = 0$ إذا وإذا فقط كانت $x \in \overline{E}$.

(ب) برهن على أن ρ_E دالة مستمرة بانتظام في X، وذلك ببيان أن

$$\left|\rho_E(x) - \rho_E(y)\right| \le d(x, y)$$

لجميع $x \in X, y \in X$.

تلميح: $\rho_E(x) \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

لذلك $\rho_E(x) \le d(x,y) + \rho_E(y)$,

٢١- افترض أن K و F مجموعتان منفصلتان في الفضاء المتري X، وان K متراصة، F مغلقة. برهن على أنه يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $d(p,q) > \delta$ إذا كانت $q \in F, p \in K$.

تلميح: ρ_F هي دالة مستمرة موجبة في K.

بين أن النتيجة قد لا تتحقق بالنسبة لمجموعتين مغلقتين منفصلتين إذا لم تكن أي واحدة منهما متراصة.

٢٢- لتكن A و B مجموعتين منفصلتين غير خاليتين في الفضاء المتري X، وعرف

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \qquad (p \in X).$$

بين أن f دالة مستمرة في X التي يقع مداها في $[0,1]$ وان $f(p) = 0$ ، بالضبط في A و $f(p) = 1$ بالضبط في B. يبرهن هذا معكوس التمرين ٣: كل مجموعة مغلقه $A \subset X$ تكون $Z(f)$ لبعض f الحقيقية والمستمرة في X. بوضع

$$V = f^{-1} = \left(\left[0,\tfrac{1}{2}\right)\right), \qquad ، \qquad W = f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},1\right]\right)$$

بين أن V و W تكونا منفصلتين ومفتوحتين، وبان $A \subset V$، $B \subset W$. (لذلك فإن أزواج المجموعات المنفصلة والمنغلقة في الفضاء المتري يمكن أن تغطي بأزواج مجموعات منفصلة ومفتوحة. يطلق على هذه الخاصية للفضاء المتري *"النظامية"* ***normality***.

٢٣- يقال لداله القيمة –الحقيقية f المعرفة في (a,b) بأنها *محدبة* ***convex*** إذا كانت

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

كلما كانت $a < x < b, \ a < y < b, \ 0 < \lambda < 1$.

برهن على أن كل دالة محدبة تكون مستمرة. برهن على أن كل دالة محدبة متزايدة لدالة محدبة تكون محدبة. (على سبيل المثال، إذا كانت f محدبة، فإن e^f تكون كذلك).

إذا كانت f محدبة في (a,b) وإذا كانت $a < s < t < u < b$، بين أن

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \le \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \le \frac{f(u)-f(t)}{u-t}.$$

٢٤- افترض أن f دالة حقيقية مستمرة معرفة في (a,b) بحيث أن

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

لجميع $x, y \in (a,b)$. برهن على أن f تكون محدبة.

٢٥- إذا كانت $A \subset \mathbf{R}^k$ و $B \subset \mathbf{R}^k$، عرف $A+B$ لتكون المجموعة التي تضم جميع المجاميع $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ بـ $\mathbf{x} \in A$ ، $\mathbf{y} \in B$.

(أ) إذا كانت K متراصة و C مغلقة في $\mathbf{R}^k$، برهن على أن $K+C$ تكون مغلقة.

تلميح: خذ $\mathbf{z} \notin K+C$ ضع $F = \mathbf{z} - C$، المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ بحيث $\mathbf{y} \in C$. عندها فإن K و F تكونا غير متقاطعين. أختار δ كما في التمرين ٢١. بين أن الكرة المفتوحة التي يكون مركزها $\mathbf{z}$ ونصف قطرها δ لا تقاطع $K+C$.

(ب) لتكن α عدد اً حقيقياً غير نسبي. لتكن C_1 مجموعة جميع الأعداد الصحيحة، لتكن C_2 مجموعة جميع $n\alpha$ بحيث $n \in C_1$. بين أن C_1 و C_2 مجموعتين جزئيتين مغلقتين لـ $\mathbf{R}^1$ اللتين يكون مجموعتهما $C_1 + C_2$ غير مغلقاً، وذلك ببيان أن $C_1 + C_2$ مجموعة جزئية كثيفة قابلة للعد $\mathbf{R}^1$.

٢٦- أفترض أن X، Y، Z فضاءآت مترية، وإن Y متراصة. لتكن f تطبيق X في Y، لتكن g تطبيقاً مستمراً واحد لواحد لـ Y في Z، وضع $h(x) = g(f(x))$ بالنسبة لـ $x \in X$.

برهن على أن f تكون مستمرة بانتظام إذا كانت h مستمرة بانتظام.

تلميح: تمتلك g^{-1} منطلقـاً متراصـاً $g(Y)$، و $f(x) = g^{-1}(h(x))$.

برهن أيضاً على أن f تكون مستمرة إذا كانت h مستمرة.

بين (بتحوير المثال ٤، ٢١ ، أو بإيجاد مثالاً مختلفاً) على أن تراص Y لا يمكن حذفه من الافتراض، حتى عندما تكون X و Z متراصتين.

الفصل الخامس

التفاضـــــل

- مشتقة الدوال الحقيقية
- مبرهنات القيمة الوسطى
- استمرارية المشتقات
- قاعدة آل هوبتال
- مشتقات الرتبة الأعلى
- مبرهنة تيلر
- تفاضل الدوال ذات القيم المتجهة
- تمارين

الفصل الخامس
التفـاضــل
Differentiation

سوف نحدد اهتمامنا في هذا الفصل (باستثناء الجزء الأخير منه) على الدوال الحقيقية المعرفة في الفترات أو القطع. يرجع ذلك إلى أسباب منطقية، نظراً لظهور اختلافات جوهرية عندما ننتقل من الدوال الحقيقية إلى الدوال ذات القيم المتجهة. سوف نناقش تفاضل الدوال المعرفة في R^k في الفصل التاسع.

مشتقة الدالة الحقيقية The Derivative Of A Real Function

٥، ١ تعريف: لتكن f معرفة (وبقيم حقيقية) في $[\, a\, ,\, b\,]$. لأي $x \in [a,b]$ كوّن حاصل القسمة

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \qquad (a < t < b, t \neq x), \tag{١}$$

وعرف

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi\,(t)\ , \tag{٢}$$

شريطة أن تكون هذه الغاية موجودة وفقاً للتعريف ٤، ١

لذلك نرفق مع الدالة f الدالة f' التي يكون منطلقها مجموعة النقاط x التي يكون عندها الغاية (٢) موجودة ؛تسمى f' *مشتقة f derivative*.

إذا كانت f' معرفة في النقطة x فإننا نقول أن f *قابلة للتفاضل في x differentiable at*.

إذا كانت f' معرفة عند كل نقطة بمجموعة $E \subset [a,b]$، فإننا نقول أن f قابلة للتفاضل في E.

من الممكن أن نلاحظ الغايتين اليمنى واليسرى في (٢)، وهذا يؤدي إلى تعريف المشتقتين اليمنى واليسرى. وبصورة خاصة، عند نقطتي النهاية a و b، فإن المشتقة، إذا كانت موجودة، تكون مشتقة يمنى أو يسرى، على التوالي. سوف لا ندخل بالنقاش التفصيلي لمشتقات الجهة الواحدة.

إذا كانت f معرفة في القطعة (a,b) وإذا كانت $a < x < b$ فإن $f'(x)$ تكون

معرفة بـــ (١) و(٢)، كما في أعلاه. ولكن $f'(a)$ و $f'(b)$ ليستا معرفتين في هذه الحالة.

٥، ٢ مبرهنة: *لتكن f معرفة في $[a,b]$. إذا كانت f قابلة للتفاضل في النقطة $x\in[a,b]$، عندها فإن f تكون مستمرة في x*

البرهان: عندما $t \to x$، فإن لدينا، استناد للمبرهنة ٤، ٤ ،

$$f(t)-f(x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot(t-x)\to f'(x)\cdot 0=0 \ .$$

إن معكوس هذه المبرهنة ليس صحيحاً. من السهل بناء دوال مستمرة تخفق في أن تكون قابلة للتفاضل في النقاط المنعزلة. في الفصل السابع سنتعرف حتى على الدالة التي تكون مستمرة على طول الخط بدون أن تكون قابلة للتفاضل عند أي نقطة !

٥، ٣ مبرهنة: *لنفترض أن f و g معرفتين في $[a,b]$ وقابلتين للتفاضل عند النقطة $x\in[a,b]$. عندها فإن $f+g$ ، fg ، و f/g تكون قابلة للتفاضل عند x و*

(أ) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$؛

(ب) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ؛

(ج) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

بالطبع فإننا نفترض في (ج) أن $g(x)\neq 0$.

البرهان: (أ) واضحة، استناداً للمبرهنة ٤، ٤. لتكن $h=fg$. عندها فإن

$$h(t)-h(x)=f(t)\big[g(t)-g(x)\big]+g(x)\big[f(t)-g(x)\big] \ .$$

إذا قسمنا على t x - ونلاحظ أن $f(t)\to f(x)$ عندما $t\to x$ (المبرهنة ٥، ٢)، فإن (ب) تكون قد برهنت. الخطوة الآتية، لتكن h $=f/g$. عندها فإن

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right] .$$

وبترك $t\to x$، المبرهنتين ٤، ٤ و ٥، ٢، فإننا نحصل على (ج).

٥، ٤ أمثلة: من الواضح أن مشتقة أي قيمة ثابتة تساوي صفر. إذا كانت f معرفة بـــ $f(x)=x$، فإن $f'(x)=1$. أن التطبيقات المتكررة لـــ (ب) و(ج) سوف تبين أن x^n

تكون قابلة للتفاضل، وبأن مشتقتها هي nx^{n-1}، لكل عدد صحيح n (إذا كانت $n < 0$، فإن علينا لن نقتصر على $x \neq 0$). لذلك فإن كل مقدار متعدد الحدود يكون قابلاً للتفاضل، وكذلك كل دالة نسبية، باستثناء عند تلك النقاط التي يكون مقامها صفراً.

يطلق على المبرهنة الآتية *"قاعدة التتابع" "chain rule"*، وهي تتناول تفاضل الدوال المركبة وربما تكون أهم مبرهنة بخصوص المشتقات. وسوف نتناول الإطار الأكثر عمومية لها في الفصل التاسع.

٥، ٥ مبرهنة: *لنفترض أن f مستمرة في $[a , b]$، وأن $f'(x)$ متواجدة عن بعض النقاط $x \in [a,b]$، g معرفة على الفترة I التي تحتوي على مدى f، وإن g قابلة للتفاضل عند النقطة $f(x)$. إذا كانت*

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \leq t \leq b),$$

عندها فإن h تكون قابلة للتفاضل عند x و

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{٣}$$

البرهان: لتكن $y = f(x)$. استناداً لتعريف المشتقة، فإن لدينا

$$f(t) - f(x) = (t - x)\left[f'(x) + u(t)\right], \tag{٤}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)\left[g'(y) + v(s)\right], \tag{٥}$$

حيث أن $t \in [a,b]$, $s \in I$ و $u(t) \to 0$ عندما $t \to x$، $v(s) \to 0$ عندما $s \to y$

لتكن $s = f(t)$.

باستخدام (٥) أولا ثم (٤)، فإننا نحصل على

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t) - g(f(x)) \\ &= \left[f(t) - f(x)\right] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right], \\ &= (t - x) \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right] \end{aligned}$$

أو، إذا كانت $t \neq x$،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \left[g'(y) + v(s)\right] \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] . \tag{٦}$$

لندع $t \to x$، فإننا نلاحظ أن $s \to y$ ؛ استناداً لاستمرارية f، لذلك فإن الجهة اليمنى من (٦) تتجه إلى $g'(y)f'(x)$، والذي يعطينا (٣).

٥، ٦ أمثلة:

(أ) لتكن f معرفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0. \end{cases} \qquad (٧)$$

لنسلم جدلاً أن مشتقة $\sin x$ هي $\cos x$ (سوف نناقش الدوال المثلثية في الفصل الثامن)، نستطيع أن نطبق المبرهنتين ٥، ٣ و ٥، ٥ كلما كان $x\neq 0$، ونحصل على

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0)\ . \qquad (٨)$$

عندما $x=0$ فإن هاتين المبرهنتين لا تنطبقان عندها، نظراً لأن $\dfrac{1}{x}$ تكون غير معرفة حينها، وعندها فإننا نستغيث مباشرة بالتعريف: بالنسبة لـ $t\neq 0$،

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\sin\frac{1}{t}\ .$$

عندما $t\to 0$، فإن هذا لا يميل إلى أي غاية، لذلك فإن $f'(0)$ لا يتواجد.

(ب) لتكن f معرفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0, \end{cases} \qquad (٩)$$

كما في أعلاه، فإننا نحصل على

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0)\ . \qquad (١٠)$$

عندما $x=0$، فأننا نستغيث بالتعريف، ونحصل على

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right|=\left|t\sin\frac{1}{t}\right|\leq |t| \quad t\neq 0\ ;$$

لندع $t\to 0$، فأننا نلاحظ أن

$$f'(0)=0 \qquad (١١)$$

لذلك فإن f تكون قابلة للتفاضل عند جميع النقاط x ولكن f' ليست دالة مستمرة، نظراً لأن $\cos(1/x)$ في (١٠) لا تميل إلى غاية عندما $x\to 0$.

مبرهنات القيمة الوسطى Theorems Value Mean

٥، ٧ تعريف: لتكن f دالة حقيقية معرفة في الفضاء المتري X. نقول أن f *تمتلك نهاية عظمى محلية local maximum* في النقطة $p \in X$ إذا كان يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $f(q) \le f(p)$ لجميع $q \in X$ بحيث $d(p,q) < \delta$.

النهاية الصغرى المحلية **Local minima** تعرف بنفس الطريقة.

المبرهنة القادمة هي الأساس لكثير من التطبيقات في الاشتقاق.

٥، ٨ مبرهنة: *لتكن f معرفة في $[a,b]$؛ إذا كانت f تمتلك نهاية عظمى محليه في النقطة $x \in (a,b)$، وإذا كانت $f'(x)$ تتواجد، عندها فإن $f'(x) = 0$.*

وبالطبع يصح أيضا النص المماثل للنهاية الصغرى المحلية.

البرهان: نختار δ وفقاً للتعريف ٥، ٧، لذلك فإن

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b \ .$$

إذا كانت $x - \delta < t < x$، فإن

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ge 0 \ .$$

لندع $t \to x$، فإننا نلاحظ أن $f'(x) \ge 0$.

إذا كانت $x < t < x + \delta$، فإن

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \le 0,$$

والذي يبين أن $f'(x) \le 0$. إذن $f'(x) = 0$.

٥، ٩ مبرهنة: *إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين مستمرتين في $[a,b]$ واللتان تكونان قابلة للتفاضل في (a,b)، عندها يوجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ تكون فيها*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) \ .$$

لاحظ بأن القابلية على التفاضل غير مطلوبة في نقاط النهاية.

البرهان: ضع

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \qquad (a \le t \le b) \ .$$

عندها فإن h تكون مستمرة في $[a,b]$، h قابلة للتفاضل في (a,b)، و

$$.h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b) \qquad (١٢)$$

لبرهنة المبرهنة، يتوجب علينا أن نبين أن $h'(x) = 0$ لبعض $x \in (a,b)$.

إذا كانت h مقداراً ثابتاً، فإن ذلك يتحقق لكل $x \in (a,b)$. إذا كانت $h(t) > h(a)$ لبعض $t \in (a,b)$، لتكن x نقطة في $[a,b]$ تحقق فيها h نهايتها العظمى (المبرهنة ٤، ١٦). استناداً إلى (١٢)، $x \in (a,b)$، وتبين المبرهنة ٥، ٨ أن $h'(x) = 0$. إذا كانت $h(t) < h(a)$ لبعض $t \in (a,b)$، فإن نفس المناقشة تنطبق إذا اخترنا لـ x نقطة في $[a,b]$ تحقق فيها h نهايتها الصغرى.

غالباً ما يطلق على هذه المبرهنة *أعمام لمبرهنة القيمة الوسطى* ***generalized mean values theorem***؛ عادة ما يطلق على الحالة الخاصة الآتية "*مبرهنة القيمة الوسطى*" ***"mean values theorem"***.

٥، ١٠ مبرهنة: *إذا كانت f دالة حقيقية مستمرة في $[a,b]$ والتي تكون قابلة للتفاضل في (a,b)، عندها توجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$ يكون فيها*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x) \quad .$$

البرهان: نأخذ $g(x) = x$ في المبرهنة ٥، ٩.

٥، ١١ مبرهنة: *لنفترض أن f تكون قابلة للتفاضل في (a,b).*

(أ) *إذا كانت $f'(x) \geq 0$ لجميع $x \in (a,b)$، فإن f تكون متزايدة ترتيبا.*

(ب) *إذا كانت $f'(x) = 0$ لجميع $x \in (a,b)$، فإن f تكون ثابتة.*

(ج) *إذا كانت $f'(x) \leq 0$ لجميع $x \in (a,b)$، فإن f تكون متناقصة ترتيبا.*

البرهان يمكن استخلاص جميع النتائج من المعادلة

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x),$$

التي تكون صحيحة، لكل زوج من الأعداد x_2, x_1 في (a,b)، لبعض x بين x_1 و x_2

استمرارية المشتقات The Continuity Of Derivatives

لاحظنا سابقاً [المثال ٥، ٦ (ب)] بأن الدالة f قد تمتلك المشتقة f' التي تتواجد عند

كل نقطة، ولكنها ليست مستمرة عند بعض النقاط. على الرغم من ذلك، فإن ليس كل دالة تكون مشتقة. وعلى وجه الخصوص، تمتلك المشتقات الموجودة في كل نقطة في فترة بشكل مشترك خصائص مهمة مع الدوال التي تكون مستمرة على تلك فترة : تكون القيم الوسطى مسلم بصحتها (قارن المبرهنة ٤، ٢٣) النص المضبوط سيرد لاحقاً.

٥، ١٢ مبرهنة: *لنفترض أن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل في $[a,b]$ ولنفترض أن $f'(a) < \lambda < f'(b)$. عندها يوجد هنالك نقطة $x \in (a,b)$* بحيث أن $f'(x) = \lambda$.

وبالطبع فإن نتيجة مماثلة تتحقق إذا كانت $f'(a) > f'(b)$.

البرهان: نضع $g(t) = f(t) - \lambda t$. عندها فإن $g'(a) < 0$ لذلك فإن $g(t_1) < g(a)$ لبعض $t_1 \in (a,b)$ و $g'(b) > 0$ ، لذلك فإن $g(t_2) < g(b)$ لبعض $t_2 \in (a,b)$. إذن g تحرز غايتها الصغرى في $[a,b]$ (المبرهنة ٤، ١٦) في بعض النقاط x بحيث أن $a < x < b$. استناداً للمبرهنة ٥، ٨، فإن $g'(x) = 0$. اذن $f'(x) = \lambda$.

نتيجة: *إذا كانت f قابلة للتفاضل في $[a,b]$، فإن f' لا يمكن أن تمتلك أي عدم استمرارية بسيطة في $[a,b]$.*

ولكن من الجائز جداً أن تمتلك f' عدم استمرارية من النوع الثاني.

قاعدة ال هوبيتال L`Hospital`S Rule

غالباً ما تكون المبرهنة القادمة مفيدة في تقييم الغايات.

٥، ١٣ مبرهنة: *لنفترض أن f و g دالتان حقيقيتان وقابلتان للتفاضل في (a,b)* ، وان $g'(x) \neq 0$ لجميع $x \in (a,b)$ ، حيث $-\infty < a < b \leq +\infty$. *لنفترض أن*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{عندما} \quad x \to a \tag{١٣}$$

إذا كانت

$$f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0 \quad \text{عندما} \quad x \to a \tag{١٤}$$

أو إذا كانت

$$g(x) \to +\infty, \quad \text{عندما} \quad x \to a \tag{١٥}$$

فإن

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \; . \quad \text{عندما} \quad x \to a \tag{١٦}$$

وبالطبع يصح العرض إذا كانت $x \to b$، أو إذا كانت $g(x) \to -\infty$ في (١٥). لنلاحظ بأننا نستخدم الآن مفهوم الغاية في المعنى الموسع للتعريف ٤، ٣٣.

البرهان: ندرس أولا الحالة التي تكون فيها $-\infty \le A < +\infty$. نختار عدداً حقيقياً q بحيث أن $A < q$ ثم نختار r بحيث أن $A < r < q$. استناداً لـ (١٣) يوجد هنالك نقطة $c \in (a,b)$ بحيث أن $a < x < c$ تدل على

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \; . \tag{١٧}$$

إذا كانت $a < x < y < c$، فإن المبرهنة ٥، ٩ تبين انه يوجد هنالك نقطة $t \in (x,y)$ بحيث أن

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \; . \tag{١٨}$$

افترض أن (١٤) تتحقق. لندع $x \to a$ في (١٨)، فإننا نلاحظ أن

$$(a<y<c) \qquad \frac{f(y)}{g(y)} \le r < q \quad (a<y<c). \tag{١٩}$$

الخطوة الآتية، نفترض أن (١٥) تتحقق. بترك y ثابتة في (١٨)، نستطيع أن نختار النقطة $c_1 \in (a,y)$ بحيث أن $g(x) > g(y)$ و $g(x) > 0$ إذا كانت $a < x < c_1$. إذا ضربنا (١٨) بــ $[g(x)-g(y)]/g(x)$، فإننا نحصل على

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1) \; . \tag{٢٠}$$

إذا تركنا $x \to a$ في (٢٠)، فإن (١٥) تبين أنه يوجد هنالك نقطة $c_2 \in (a,c_1)$ بحيث أن

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad (a < x < c_2) \; . \tag{٢١}$$

خلاصة القول، تبين (١٩) و (٢١) أنه لأي q، تخضع للشرط $A < q$ فقط، يوجد هنالك نقطة c_2 بحيث أن $f(x)/g(x) < q$ إذا كانت $a < x < c_2$.

بنفس الطريقة، إذا كانت $-\infty < A \le +\infty$، واخترت p بحيث $p < A$، فإننا نستطيع أن نجد النقطة c_3 بحيث أن

$$p<\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a<x<c_3), \tag{٢٢}$$

ونستنتج (١٦) من هاتين العبارتين.

مشتقات الرتبة الأعلى Derivatives Of Higher Order

٥، ١٤ تعريف: إذا كانت f تمتلك المشتقة f' في فترة ما، وكانت f' نفسها قابلة للتفاضل، فإننا نرمز لمشتقة f' بالرمز f'' ونطلق على f'' المشتقة الثانية لـ f. إذا استمرينا بهذه الطريقة، فإننا نحصل على الدوال

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)},$$

كل واحدة منها هي مشتقة الدالة التي تسبقها. نطلق على $f^{(n)}$ المشتقة النونية، أو المشتقة ذات الرتبة n، لـ f.

لأجل أن تتواجد $f^{(n)}(x)$ عند النقطة x فإن $f^{(n-1)}(t)$ يجب أن تتواجد في جوار لـ x (أو في منطقة مجاورة من جهة واحدة، إذا كانت x نقطة نهاية في الفترة الذي عرفت فيها f)، ويجب أن تكون $f^{(n-1)}$ قابلة للتفاضل في x. بما أن $f^{(n-1)}$ يجب أن تتواجد في جوار لـ x فإن $f^{(n-2)}$ يجب أن تكون قابلة للتفاضل في ذلك الجوار.

مبرهنة تيلور Taylor's Theorem

٥، ١٥ مبرهنة: *لنفترض أن f دالة حقيقية في $[a,b]$، n عدداً صحيحاً موجباً، $f^{(n-1)}$ مستمرة في $[a,b]$، $f^{(n)}(t)$ تتواجد عند كل $t\in(a,b)$. لتكن α , β نقطتين مختلفتين في $[a,b]$، ونعرف*

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k. \tag{٢٣}$$

عندها توجد هنالك نقطة x بين α و β بحيث أن

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{٢٤}$$

بالنسبة لـ $n = 1$، فإن هذه عبارة عن مبرهنة القيمة الوسطية لا غير. بصورة عامة، تبين المبرهنة أن بالإمكان تقريب f بمقدار متعدد الحدود بدرجة $n - 1$، وإن (٢٤) تسمح لنا بتقدير الخطأ، إذا عرفنا القيود على $\left|f^{(n)}(x)\right|$.

البرهان: ليكن M العدد المعرف بـ

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n \tag{٢٥}$$

ونضع

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n \quad (a \le t \le b). \tag{٢٦}$$

يجب علينا أن نبين أن $n!M = f^{(n)}(x)$ لبعض x بين α و β. استناداً إلى (٢٣) و(٢٦)، فإن

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b). \tag{٢٧}$$

إذن سيكمل البرهان إذا استطعنا أن نبين بأن $g^{(n)}(x) = 0$ لبعض x بين α و β.

بما أن $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ بالنسبة لـ $k = 0,1,\dots,n-1,$ فإن لدينا

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0. \tag{٢٨}$$

إن اختيارنا لـ M يبين أن $g(\beta) = 0$، لذلك فإن $g'(x_1) = 0$ لبعض x_1 بين α و β، استنادا لمبرهنة القيمة الوسطية. بما أن $g'(\alpha) = 0$، فإننا نستنتج بنفس الطريقة أن $g''(x_2) = 0$ لبعض x_2 بين α و x_1. بعد n من الخطوات نصل الاستنتاج بأن $g^{(n)}(x_n) = 0$ لبعض x_n بين α و x_{n-1}، وهذا يعني، بين α و β.

تفاضل الدوال ذات القيم المتجهة

Differentiation Of Vector-Valued Functions

٥، ١٦ ملاحظات: ينطبق التعريف ٥، ١ بدون أي تغيير على الدوال المركبة f المعرفة في $[a,b]$، وكذلك تبقى المبرهنتان ٥، ٢ و٥، ٣، إضافة إلى براهينهما، صحيحتان. إذا كان f_1 و f_2 الجزئين الحقيقي والخيالي لـ f، أي أنه، إذا كان

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

بالنسبة لـ $a \le t \le b$، حيث $f_1(t)$ و $f_2(t)$ حقيقيتين، عندها فإن من الواضح أن لدينا

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x); \tag{٢٩}$$

إضافة لذلك، فإن f تكون قابلة للتفاضل في x إذا وإذا فقط كان كلاً من f_1 , f_2 قابلاً للتفاضل في x.

عند الانتقال إلى دوال القيم المتجهة بصورة عامة، أي، إلى الدوال $\mathbf{f}$ التي تصور $[a,b]$ في

بعض $\mathbf{R}^k$، فإن باستطاعتنا أن نطبق التعريف ٥، ١ لتعريف $\mathbf{f}'(x)$. يصبح الآن الحد $\phi(t)$ في (١)، لكل t، نقطة في $\mathbf{R}^k$، وتؤخذ الغاية في (٢) بالاستناد إلى المعيار لــ $\mathbf{R}^k$. بكلمه أخرى، $\mathbf{f}'(x)$ هي تلك النقطة في $\mathbf{R}^k$ (إذا كان يوجد هنالك واحدة) التي يكون عندها .

$$\lim_{t\to x}\left|\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(x)}{t-x}-\mathbf{f}'(x)\right|=0, \qquad (٣٠)$$

و $\mathbf{f}'$ هي أيضا دالة تكون قيمتها في $\mathbf{R}^k$.

إذا كان $f_1,\ldots,f_k$ مكونات $\mathbf{f}$، كما هو معروف في المبرهنة ٤، ١٠، فإن

$$\mathbf{f}'=(f_1',\ldots,f_k'), \qquad (٣١)$$

و $\mathbf{f}$ تكون قابلة للتفاضل في النقطة x إذا وإذا فقط كان كل من الدوال $f_1,\ldots,f_k$ قابلاً للتفاضل في x.

تصح أيضا المبرهنة ٥، ٢ ضمن هذا الإطار، وكذلك المبرهنة ٥، ٣ (ا) و (ب)، ÷ إذا ما استبدل fg بحاصل الضرب الداخلي $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ (لاحظ التعريف ٤، ٣).

إلا أننا عندما ننتقل إلى مبرهنة القيمة الوسطية، والى أحد نتائجها بالتحديد قاعدة آل هوبيتال، فإن الوضعية تتغير.

يبين المثالان الآتيان بأن كلاً من هاتين النتيجتين لا تصح بالنسبة لدوال القيم - المركبة.

٥، ١٧ مثال: عرف، لقيم x الحقيقية، بــ

$$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x\ . \qquad (٣٢)$$

(من الممكن اعتبار التغيير الأخير تعريفاً للأس المركب e^{ix} ؛ راجع الفصل الثامن للدراسة الكاملة لهذه الدوال) إذن

$$f(2\pi)-f(0)=1-1=0, \qquad (٣٣)$$

ولكن

$$f'(x)=ie^{ix}, \qquad (٣٤)$$

لذلك فإن $|f'(x)|=1$ لجميع x الحقيقية.

لذلك فإن المبرهنة ٥، ١٠ لا تتحقق عن هذه الحالة.

٥، ١٨ مثال: في القطعة $(0,1)$، عرف $f(x)=x$ و

$$g(x)=x+x^2e^{i/x^2}. \tag{٣٥}$$

بما أن $|e^{it}|=1$ لجميع t الحقيقية، فإننا نلاحظ أن

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 . \tag{٣٦}$$

بعد ذلك

$$g'(x)=1+\left\{2x-\frac{2i}{x}\right\}e^{i/x^2} \qquad (0<x<1), \tag{٣٧}$$

لذلك فإن

$$|g'(x)|\geq\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geq\frac{2}{x}-1 . \tag{٣٨}$$

إذن

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{|g'(x)|}\right|\leq\frac{x}{2-x} \tag{٣٩}$$

ولذلك

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0 . \tag{٤٠}$$

استنادا لـــ (٣٦) و (٤٠)، فإن قاعدة ال هوبيتال لا تتحقق في هذه الحالة. لاحظ أيضاً بأن $g'(x)\neq 0$ في $(0,1)$، استنادا إلى (٣٨).

على الرغم من ذلك، توجد هنالك نتيجة للمبرهنة القيمة الوسطية والتي، لأغراض التطبيق، لا تقل فائدة عن المبرهنة ٥، ١٠، والتي تحافظ على صحتها بالنسبة لدوال القيم – المتجهة: نحصل من المبرهنة ٥، ١٠ على أن

$$|f(b)-f(a)|\leq(b-a)\sup_{a<x<b}|f'(x)|. \tag{٤١}$$

٥، ١٩ مبرهنة:

لنفترض أن $\mathbf{f}$ تطبيقاً مستمراً لـــ $[a,b]$ إلى R^k و $\mathbf{f}$ قابلة للتفاضل في (a,b). عندها يوجد هنالك $x\in(a,b)$ بحيث أن

$$|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|\leq(b-a)|\mathbf{f}'(x)| .$$

البرهان: [١]

نضع $\mathbf{z} = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$، ونعرف

$$\varphi(t) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t) \qquad (a \le t \le b)$$

عندها فإن φ تكون دالة بقيمه حقيقية ومستمرة في $[a,b]$ والتي تكون قابلة للتفاضل في (a,b). لذلك فإن المبرهنة القيمة الوسطية تبين أن

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(x) = (b-a)\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}'(x)$$

لبعض $x \in (a,b)$. من جهة أخرى، فإن

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(b) - \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(a) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2 \ .$$

نقدم الآن متباينة شو أرز بأن

$$|\mathbf{z}|^2 = (b-a)|\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}'(x)| \le (\mathrm{b}-\mathrm{a})|\mathbf{z}||\mathbf{f}'(x)|$$

إذن $|\mathbf{z}| \le (b-a)|\mathbf{f}'(x)|$، والتي هي النتيجة المطلوبة.

(١) V.P. Havin قام بترجمة الطبعة الثانية من هذا الكتاب إلى اللغة الروسية قام بإضافة البرهان لهذه المبرهنة إلى الأصل الأول.

تمارين EXERCISES

١- لتكن f معرفة لجميع الأعداد الحقيقية x وافترض أن

$$|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2$$

لجميع x و y الحقيقيتين. برهن على أن f تكون ثابتة.

٢- افترض أن $f'(x)>0$ في (a,b). برهن على أن f تكون متزايدة بشكل تام في (a,b)، ولتكن g دالتها العكسية. برهن على أن g تكون قابلة للتفاضل، وبأن

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (a<x<b).$$

٣- افترض أن g دالة حقيقية في $\mathbf{R}^1$، مع أن المشتقة لها قيد (لنقل أن $|g'| \le M$). ثبت أن $\varepsilon>0$، وعرفت $f(x)=x+\varepsilon\, g(x)$ برهن أن f هي 1-1 إذا كان ε هو صغير بشكل كافي. (المجموعة المقبولة لقيم ε يمكن أن تكون تعتمد في تحديدها على M فقط).

٤- إذا كانت

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{n}+\frac{C_n}{n+1}=0,$$

حيث $C_0,\dots,C_n$ ثوابت حقيقية، برهن على أن المعادلة

$$C_0+C_1x+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=0$$

تمتلك على الأقل جذراً حقيقياً واحداً بين 0 و 1.

٥- أفترض أن f تكون معرفة وقابلة للتفاضل عند كل $x>0$، وإن $f'(x)\to 0$ عندما $x\to+\infty$. ضع $g(x)=f(x+1)-f(x)$. برهن على أن $g(x)\to 0$ عندما $x\to+\infty$.

٦- افترض أن

(أ) f مستمرة لـــ $x\ge 0$،

(ب) تتواجد $f'(x)$ لـــ $x>0$،

(ج) $f(0)=0$،

(د) تكون f' متزايدة ترتيباً.

ضع

$$g(x)=\frac{f(x)}{x} \qquad (x>0)$$

وبرهن على أن g تكون متزايدة ترتيباً.

٧- أفترض أن $f'(x)$، $g'(x)$ موجودتان، $g'(x) \neq 0$ و $f(x) = g(x) = 0$. برهن على أن

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(يتحقق هذا أيضاً في الدوال المركبة).

٨- أفترض أن f' مستمرة في $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$. برهن على أنه يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

كلما كان $0 < |t - x| < \delta$، $a \leq t \leq b, a \leq x \leq b$. (بالإمكان التعبير عن ذلك بالقول أن f قابلة للتفاضل بصورة منتظمة في $[a,b]$ إذا كانت f' مستمرة في $[a,b]$).

هل يتحقق ذلك أيضاً بالنسبة لدوال القيم المتجهة ؟

٩- لتكن f دالة حقيقية مستمرة في R^1 والتي تعرف عندها أن $f'(x)$ موجودة لجميع $x \neq 0$ وبأن $f'(x) \to 3$ عندما $x \to 0$. هل يستنتج من ذلك أن $f'(0)$ موجودة؟

١٠- أفترض أن f و g دالتين مركبتين قابلتين للتفاضل في $(0,1)$، وإن $f(x) \to 0$، $g(x) \to 0$، $f'(x) \to A$، $g'(x) \to B$ عندما $x \to 0$، حيث أن A و B عددين عقديين، $B \neq 0$. برهن على أن

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

قارن ذلك بالمثال ٥، ١٨. *تلميح:* -

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$

طبق المبرهنة ٥، ١٣ على الجزئين الحقيقي والخيالي من $f(x)/x$ و $g(x)/x$.

١١- أفترض أن f معرفة في الجوار لـــ x وأفترض أن $f''(x)$ موجودة. بين أن

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

بين بمثال أن الغاية قد تكون موجودة حتى إذا لم تكن $f''(x)$ موجودة.

تلميح: –أستخدم المبرهنة ٥، ١٣.

١٢– إذا كانت $f(x)=|x|^3$، أوجد $f'(x), f''(x)$ لجميع x الحقيقية، وبين أيضاً أن $f^{(3)}(0)$ غير موجودة.

١٣– أفترض أن a و c عددين حقيقيين، $c>0$، و f معرفة في $[-1,1]$ بـ

$$f(x)=\begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & (\text{إذا كانت } x\neq 0), \\ 0. & (\text{إذا كانت } x=0). \end{cases}$$

برهن العبارات الآتية:

(أ) تكون f مستمرة إذا وإذا فقط كانت $a>0$.

(ب) تكون $f'(0)$ موجودة إذا وإذا فقط كانت $a>1$.

(ج) تكون f' مقيدة إذا وإذا فقط كانت $a\geq 1+c$.

(د) تكون f' مستمرة إذا وإذا فقط كانت $a>1+c$.

(هـ) تكون $f''(0)$ موجودة إذا وإذا فقط كانت $a>2+c$.

(و) تكون f'' مقيدة إذا وإذا فقط كانت $a\geq 2+2c$.

(ز) تكون f'' مستمرة إذا و إذا فقط كانت $a>2+2c$.

١٤– لتكن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل في (a,b). برهن على أن f تكون محدبة إذا وإذا فقط كانت f' متزايدة ترتيبا. بعد ذلك أفترض أن $f''(x)$ موجودة لكل $x\in(a,b)$، وبرهن على أن f تكون محدبة إذا وإذا فقط كانت $f''(x)\geq 0$ لجميع $x\in(a,b)$.

١٥– أفترض أن $a\in \mathbf{R}^1$، وإن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل مرتين في (a,∞)، و M_0, M_1, M_2 القيود العلوية الصغرى لـ $|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|$، على التوالي، في (a,∞).

برهن على أن

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2 \ .$$

تلميح: إذا كانت $h>0$، فإن مبرهنة تيلور تبين أن

$$f'(x)=\frac{1}{2h}\left[f(x+2h)-f(x)\right]-hf''(\xi)$$

لبعض $\xi \in (x, x+2h)$. إذن

$$|f'(x)| \le hM_2 + \frac{M_0}{h} .$$

لبيان أن $M_1^2 = 4M_0M_2$ بالفعل، خذ $a = -1$، عرف

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & (-1 < x < 0), \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & (0 \le x < \infty), \end{cases}$$

وبين أن $M_2 = 4, M_1 = 4, M_0 = 1$.

هل أن $M_1^2 \le 4M_0M_2$ تتحقق بالنسبة لدوال القيم المتجه أيضاً ؟

١٦- أفترض أن f قابلة للتفاضل مرتين في $(0,\infty)$، f'' مقيدة في $(0,\infty)$، وأن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$. برهن على أن $f'(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

تلميح: دع $a \to \infty$ في التمرين ١٥.

١٧- افترض أن f دالة حقيقية، قابلة للتفاضل ثلاث مرات في $[-1,1]$، بحيث أن

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

برهن على أن $f^{(3)}(x) \ge 3$ لبعض $x \in (-1,1)$.

لاحظ بأن المتطابقة تتحقق بالنسبة $\frac{1}{2}(x^3 + x^2)$.

تلميح: أستخدم المبرهنة ٥، ١٥، بـــ $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$، لبيان أنه يوجد هنالك $s \in (0,1)$ و $t \in (-1,0)$ بحيث أن

$$f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6 .$$

١٨- أفترض أن f دالة حقيقية في $[a,b]$، n عدداً صحيحاً موجباً، وأن $f^{(n-1)}$ موجودة لكل $t \in [a,b]$. لتكن α , β، وكما معرفة في مبرهنة تيلور، ١٥. عرف

$$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}$$

بالنسبة $t \in [a,b]$، $t \ne \beta$، أشتق

$$f(t) - f(\beta) = (t - \beta)Q(t)$$

$n-1$ مرة في $t = \alpha$، أشتق النسخة التالية لمبرهنة تيلور :

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n.$$

١٩- أفترض أن f معرفة في $(1,1)$ و $f'(0)$ موجودة. أفترض أن $-1<\alpha_n<\beta_n<1$، و $\alpha_n\to 0$, و $\beta_n\to 0$ عندما $n\to\infty$. عرف حاصل القسمة للفرق

$$D_n=\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}.$$

برهن العبارات الآتية:

(أ) إذا كانت $\alpha_n<0<\beta_n$ فإن $\lim D_n=f'(0)$.

(ب) إذا كانت $0<\alpha_n<\beta_n$، و $\{\beta_n/(\beta_n-\alpha_n)\}$ مقيدة، فإن $\lim D_n=f'(0)$.

(ج) إذا كانت f' مستمرة في $(-1,1)$ فإن $\lim D_n=f'(0)$.

أعطي مثالاً تكون فيه f قابلة للتفاضل في $(-1,1)$ (ولكن f' ليست مستمرة في 0) والتي تكون فيها α_n,β_n تقتربان من 0 بحيث $\lim D_n$ تكون موجودة ولكنها تختلف عن $f'(0)$.

٢٠- شكّل وبرهن متباينة تتلخص من مبرهنة تيلور والتي تبقى صحيحة بالنسبة لدوال القيم المتجهة.

٢١- لتكن E مجموعة جزئية مغلقة في R^1. لاحظنا في التمرين ٢٢، للفصل الرابع، بأنه يوجد هنالك دالة حقيقية مستمرة f في R^1 التي تكون مجموعتها الصفرية. هل من الممكن، لكل مجموعة مغلقة E، إيجاد دالة مثل f تكون قابلة للاشتقاق R^1، أو قابلة للتفاضل n من المرات، أو حتى دالة تمتلك مشتقات لجميع الدرجات في R^1؟

٢٢- أفترض أن f دالة حقيقية في $(-\infty,\infty)$. تسمى *نقطة صامدة* لـ f *fixed point of f* إذا كانت $f(x)=x$.

(أ) إذا كانت f قابلة للتفاضل و $f'(t)\neq 1$ لكل t حقيقية، برهن على أن f تمتلك نقطة صامدة واحدة على الأكثر.

(ب) بين أن الدالة f المعرفة بـ

$$f(t)=t+(1+e^t)^{-1}$$

لا تمتلك نقطة صامدة، على الرغم من أن $0<f'(t)<1$ لكل t حقيقية.

(ج) على الرغم من ذلك، إذا كان هنالك ثابت $A<1$ بحيث أن $|f'(t)| \le A$ لجميع t الحقيقية، برهن على أن النقطة الصامدة x لـ f تكون موجودة، وأن $x=\lim x_n$، حيث أن x_1 هي عدد حقيقي عشوائي و

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

لـ $n=1,2,3,\ldots$.

(د) بين أنه بالإمكان تَصور الطريقة المذكورة في (ج) بالطرق المتعرج

$$(x_1,x_2)\to(x_2,x_2)\to(x_2,x_3)\to(x_3,x_3)\to(x_3,x_4)\to\cdots.$$

٢٣- الدالة f المعرفة بـ

$$f(x)=\frac{x^3+1}{3}$$

تمتلك ثلاث نقاط ثابتة، لتكن α,β,γ، حيث

$$-2<\alpha<-1\ ,\quad 0<\beta<1\ ,\quad 1<\gamma<2\ .$$

بالنسبة لـ x_1 المختارة عشوائياً، عرف $\{x_n\}$ بوضع $x_{n+1}=f(x_n)$.

(أ) إذا كانت $x_1<\alpha$، برهن على أن $x_n\to-\infty$ عندما $n\to\infty$.

(ب) إذا كانت $\alpha<x_1<\gamma$، برهن $x_n\to\beta$ عندما $n\to\infty$.

(ج) إذا كانت $\gamma<x_1$، برهن على أن $x_n\to+\infty$ عندما $n\to\infty$.

لذلك فإن تحديد مكان β بهذه الطريقة، وليس بالإمكان ذلك لـ α و γ.

٢٤- بالطبع بالإمكان أيضاً تطبيق الطريقة المذكورة في الجزء (ج) من التمرين ٢٢ على الدوال التي تطبق $(0,\infty)$ في $(0,\infty)$.

ثبت بعض $\alpha>1$، وضع

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)\ ,\qquad g(x)=\frac{\alpha+x}{1+x}.$$

كلاً من f و g تمتلك $\sqrt{\alpha}$ كنقطة صامدة وحيدة لهما في $(0,\infty)$. حاول أن تفسر، استناداً إلى خواص f و g، لما يكون التقارب المذكور في التمرين ١٦، الفصل الثالث، أكثر سرعة وبشكل كبير عن ذلك المذكور في التمرين ١٧. (قارن f' , g'، ارسم الطرق المتعرجة المقترحة في التمرين ٢٢).

افعل نفس الشيء عندما تكون $0<\alpha<1$.

٢٥- أفترض أن f قابلة للتفاضل مرتين في $[a,b]$،
$f(a)<0, f(b)>0, f'(x)\geq \delta >0$، و $0\leq f''(x)\leq M$ لجميع $x\in[a,b]$
لتكن ξ النقطة الوحيدة في (a,b) التي تكون فيها $f(\xi)=0$.
اكمل التفاصيل المذكورة في المخطط الآتي *لطريقة نيوتن* ***Newton's method*** لاحتساب ξ.

(أ) أختار $x_1\in(\xi,b)$، وعرف $\{x_n\}$ بـــ

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$

فسر ذلك هندسياً، بمفردات المماس للرسم البياني لــ f.

(ب) برهن على أن $x_{n+1}<x_n$ وبأن

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\xi \ .$$

(ج) استخدم مبرهنة تيلور لبيان أن

$$x_{n+1}-\xi=\frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2$$

لبعض $t_n\in(\xi,x_n)$.

(د) إذا كانت $A=M/2\delta$، استنتج أن

$$0\leq x_{n+1}-\xi\leq \frac{1}{A}[A(x_1-\xi)]^{2^n} \ .$$

(قارن بالتمرينين ١٦ و ١٨، الفصل الثالث).

(هــ) بين أن طريقة نيوتن تعادل إيجاد نقطة ثابتة للدالة g المعرفة

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \ .$$

كيف تتصرف $g'(x)$ في x بالقرب من ξ ؟.

(و) ضع $f(x)=x^{1/3}$ في $(-\infty,\infty)$ وطبق طريقة نيوتن. ماذا سيحدث ؟

٢٦- افترض أن f قابلة للتفاضل في $[a,b]$، $f(a)=0$، وان هنالك عدداً حقيقياً A بحيث أن $|f'(x)|\leq A|f(x)|$ في $[a,b]$. برهن على أن $f(x)=0$ لجميع $x\in[a,b]$.

تلميح: ثبت $x_0\in[a,b]$، لتكن

$$M_1=\sup|f'(x)| \quad , \quad M_0=\sup|f(x)|$$

لـ $a \le x \le x_0$. لأي من مثل هذه ألـ x،

$$|f(x)| \le M_1(x_0 - a) \le A(x_0 - a)M_0 \ .$$

إذن $M_0 = 0$ إذا كانت $A(x_0 - a) < 1$. أي أن، $f = 0$ في $[a, x_0]$. استمر.

٢٧- لتكن ϕ دالة حقيقية معرفة في المستطيل R في المستوي المعرف بـ $a \le x \le b$،
$\alpha \le y \le \beta$. الحل لمسألة القيمة الابتدائية

$$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c, \quad (\alpha \le c \le \beta)$$

يكون استناداً للتعريف، دالة قابلة للتفاضل f في $[a, b]$ بحيث أن $f(a) = c$،
$\alpha \le f(x) \le \beta$، و

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \qquad (a \le x \le b) \ .$$

برهن على أن مسألة كهذه تمتلك حلاً واحداً على الأكثر إذا كان يوجد هنالك ثابت A بحيث أن

$$|\phi((x, y_2) - \phi(x, y_1)| \le A|y_2 - y_1|$$

كلما كان $(x, y_1) \in R$ و $(x, y_2) \in R$.

تلميح: طبق التمرين ٢٦ على الفرق بين حلين. لاحظ بأن مبرهنة الوحدانية هذه لا تتحقق على مسألة القيمة الابتدائية

$$y' = y^{1/2}, \quad y(0) = 0,$$

التي تمتلك حلين : $f(x) = 0$ و $f(x) = x^2/4$. أوجد جميع الحلول الأخرى.

٢٨- صغ وبرهن مبرهنة وحدانية مماثلة لأنظمة الدوال القابلة للتفاضل التي تكون على شكل

$$y_j' = \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$

لاحظ بأن هذا يمكن إعادة كتابته بالشكل الآتي

$$\mathrm{y}(a) = \mathrm{c} \qquad , \qquad \mathrm{y}' = \Phi(x, \mathrm{y})$$

حيث أن $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ تمتد عبر الخلية - k، Φ هي التطبيق لـ الخلية - $(k+1)$ في الفضاء - k الاقليدي الذي عناصره الدوال $\phi_1, \ldots, \phi_k$، و c هي المتجه $(c_1, \ldots, c_k)$. استخدم التمرين ٢٦، على دوال القيم المتجه.

٢٩- خصص التمرين ٢٨ بملاحظة النظام

$$y_j' = y_{j+1} \qquad (j = 1, \ldots, k-1),$$

$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j ,$$

حيث أن f، $g_1,\dots,g_k$ دوال حقيقية مستمرة في $[a,b]$، واشتق مبرهنة الوحدانية لحلول المعادلة

$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x) \ .$$

استناداً للشروط الأولية

$$. \, y(a) = c_1 \quad , \quad y'(a) = c_2, \dots, y^{(k-1)}(a) = c_k$$

الفصل السادس

متكامل ريمان - ستيلجز

- تعريف ووجود المتكامل
- خواص المتكامل
- التكامل و التفاضل
- تكامل دوال القيم - المتجهة
- المنحنيات الممكن تحديد طول أقواسها
- تمارين

الفصل السادس
مقدم متكامل ريمان - ستيلجيز
The Riemann - Stieltjes Integral

يستند الفصل الحالي على تعريف التكامل الريماني الذي يعتمد بشكل واضح على ترتيب هيكلية الخط الحقيقي. وفقاً لذلك، فإننا نبدأ بمناقشة تكامل دوال القيم الحقيقية في الفترات. التوسع نحو الدوال المركبة ودوال القيم المتجهة في الفترات سوف يناقش في البنود التي تلي ذلك. التكامل وفق المجموعات الأخرى التي تختلف عن الفترات سوف تناقش في الفصلين ١٠ و١١.

تعريف ووجود التكامل

Definition And Existence Of The Integral

٦، ١ تعريف: لتكن $[a,b]$ فترة معينة. نعني *بالتجزئة* P لـ $[a,b]$ *partition P of* $[a,b]$ مجموعة منتهية من النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$، حيث

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b.$$

نقوم بكتابة

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n) \ .$$

الآن أفترض أن f دالة حقيقية مقيدة في $[a,b]$. بالتناظر لكل تجزئة P لـ $[a,b]$ نضع

$$M_i = \sup f(x) \quad (x_{i-1} \le x \le x_i),$$
$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \le x \le x_i),$$
$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \ ,$$

وأخيراً

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf U(P,f) \ , \qquad (١)$$

$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup L(P,f) \ , \qquad (٢)$$

حيث تكون الــ inf و sup موجودة فوق جميع التجزئات P لـــ $[a,b]$. العناصر اليسرى لـــ (١) و (٢) تسمى ***المتكاملات الريمانية العليا والسفلى*** ***upper* and *lower* *Riemann integral*** لـــ f فوق $[a,b]$، على التوالي.

إذا كان المتكاملان العلوي والسفلي متساويان، فإننا نقول أن f *قابلة للتكامل الريماني* ***Riemann integrable*** في $[a,b]$، نكتب $f \in \Re$ (نرمز $\Re$ إلى مجموعة الدوال القابلة للتكامل الريماني)، ونرمز إلى القيمة المشتركة لـــ (١) و(٢) بما يلي

$$\int_a^b f dx \ , \tag{٣}$$

أو بـــ

$$\int_a^b f(x) dx \ . \tag{٤}$$

هذا هو ***تكامل الريماني Riemann integral*** لـــ f فوق $[a,b]$، بما أن f مقيدة، يوجد هنالك عددين، m و M، بحيث أن

$$m \le f(x) \le M \qquad (a \le x \le b) \ .$$

إذن، لكل P،

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a),$$

لذلك فإن العدديين $L(P,f)$ و $U(P,f)$ يشكلان مجموعة مقيدة. يبين ذلك أن ***التكامليين العلوي والسفلي يكونان معرفان لكل دالة مقيدة f***

the upper and lower integrals are defined for every bounded function ..

إن مسألة تساويهما، و مسألة قابلية التكامل لـــ f، هي مسألة أكثر دقة. وبدلاً من البحث في هذه المسألة بشكل منفصل للتكامل الريماني، فإننا حالاً سنقوم بدراسة الحالة الأكثر عموماً.

٦، ٢ تعريف: لتكن α داله متزايدة ترتيبياً في $[a,b]$ (بما أن $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ منتهيتان، فهذا يؤدي إلى أن α تكون مقيدة في $[a,b]$). تناظراً لكل تجزئة P لـــ $[a,b]$، تكتب

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

من الواضح أن $\Delta\alpha_i \ge 0$. لكل داله حقيقية f مقيدة في $[a,b]$ نضع

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \quad ,$$

$$L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

حيث تمتلك M_i , m_i نفس المعنى المذكور في التعريف ١، ٦ وتعرف

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf\ U(P,f,\alpha) \quad , \qquad (٥)$$

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup\ L(P,f,\alpha) \, , \qquad (٦)$$

ومره ثانية تأخذ ألـــ inf وألـــ sup فوق جميع التجزئات .

إذا كانت العناصر اليسرى لـــ (٥) و(٦) متساوية، فإننا نرمز إلى قيمتهما المشتركة بـــ

$$\int_a^b f\,d\alpha \qquad (٧)$$

أو أحيانا بـــ

$$\int_a^b f(x)d\alpha\,(x) \ . \qquad (٨)$$

هذا هو متكامل ريمان ستلجز ***Riemann-Stieltjes integral*** (أو مجرد متكامل ستلجز ***Stieltjes integral***) لـــ f استناداً لـــ α، فوق $[a,b]$.

إذا كانت (٧) موجودة، أي أن، (٥) و(٦) متساويتان، فإننا نقول أن f تكون قابله للتكامل بالنسبة إلى لـــ α ، في المعنى الريماني، وتكتب $f\in\Re(\alpha)$.

بأخذ $\alpha\,(x)=x$، فإن التكامل الريماني خاصة من تكامل ريمان – ستلجز. لنذكر بصورة واضحة، أنه في الحالة العامة α لا تحتاج حتى لأن تكون مستمرة.

يستوجب الأمر أن نتحدث قليلاً بخصوص الترميز. إننا نفضل (٧) على (٨)، لأن الحرف x في (٨) لا يضيف شيئاً إلى محتوى (٧). لا يهم أي حرف تستخدم لتمثيل ما يسمى" *متغير التكامل* ***variable of integration***".

على سبيل المثال، فإن (٨) مطابقة لـــ

$$\int_a^b f(y)d\alpha(y) \ .$$

يعتمد التكامل على f, α, a و b، ولكن ليس على تغير التكامل، والذي من المفضل أحياناً حذفه.

إن الدور الذي يلعبه متغير التكامل متشابه جداً للدور الذي يلعبه دليل الجمع: أن الرمزين

$$\sum_{i=1}^{n} c_i , \quad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

هما نفس الشيء، نظراً لأن كلاً منهما يعني $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

بالطبع، لا يوجد هنالك أي ضرر بإدخال متغير التكامل، وفي حالات عديدة يكون من المفيد عمل ذلك. سوف نبحث الآن مسألة وجود التكامل (٧). بدون أن نقول ذلك في كل مرة، فإن f سوف يفترض أن تكون حقيقية ومقيدة، وأن α متزايدة ترتيباً في $[a,b]$ ؛ و عندما لا يكون هنالك أي نوع من الالتباس، فإننا سنكتب $\int$ بدلاً من $\int_a^b$.

٦، ٣ تعريف: نقول أن التجزئة P^* هي *المنقحة* ***refinement*** لـ P إذا كانت $P^* \supset P$ (أي أنه، إذا كانت كل نقطة من P هي نقطة من P^*). لنأخذ متجزئتان، P_1 و P_2، فإننا نقول P^* هي *منقحتهما المشترك* ***common refinement*** إذا كانت $P^* = P_1 \cup P_2$.

٦، ٤ مبرهنة: *إذا كانت P^* المنقحة لـ P، فإن*

$$L(P,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha) \qquad (٩)$$

و

$$U(P^*,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) \ . \qquad (١٠)$$

البرهان: لبرهنة (٩)، نفترض أولا أن P^* تحتوي على نقطة واحدة فقط أكثر من P. لتكن هذه النقطة الإضافية x^*، ونفترض أن $x_{i-1} < x^* < x_i$، حيث أن x_i و x_{i-1} هما نقطتان متعاقبتان لـ P. ضع

$$w_1 = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x^*),$$
$$w_2 = \inf f(x) \qquad (x^* \le x \le x_i).$$

من الواضح أن $w_1 \ge m_i$ و $w_2 \ge m_i$، حيث، كما في السابق،

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \le x \le x_i).$$

إذن

$$\begin{aligned} &L(P^*,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \\ &\quad = w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\quad = (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \ge 0. \end{aligned}$$

إذا كانت P^* تحتوي على kالنقاط اكثر من P ، فأننا نعيد هذا التحليل k من المرات، ونصل إلى (٩). يكون لـ (١٠) نفس البرهان.

٦، ٥ مبرهنة: $\int_{-a}^{b} f\,d\alpha \le \int_{a}^{-b} f\,d\alpha$.

البرهان: لتكن P^* المنقحة المشترك للتجزئتان P_1 و P_2 . استناداً للمبرهنة ٤، ٦،

$$L(P_1,f,\alpha) \le L(P^*,f,\alpha) \le U(P^*,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) \ .$$

إذن

$$L(P,f,\alpha) \le U(P_2,f,\alpha) \ . \qquad (١١)$$

إذا كانت P_2 ثابتة والـ sup مأخوذة على جميع P_1 ، فإن (١١)تقدم

$$\underline{\int} f\,d\alpha \le U(p_2,f,\alpha). \qquad (١٢)$$

تستنتج المبرهنة بأخذ الـ inf على جميع P_2 في (١٢).

٦، ٦ مبرهنة: *$f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$ إذا وإذا فقط كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك تجزئة P بحيث أن*

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon \ . \qquad (١٣)$$

البرهان: لكل P نملك أن

$$L(P,f,\alpha) \le \underline{\int} f\,d\alpha \le \overline{\int} f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha) \ .$$

إذن فإن (١٣) تؤدي إلى

$$0 \le \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha < \varepsilon \ .$$

إذن، إذا كان بالإمكان تحقق (١٣) لكل $\varepsilon > 0$، فإن لدينا

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha ,$$

أي أن، $f \in \Re(\alpha)$.

بالعكس، افترض أن $f \in \Re(\alpha)$ ، ولنأخذ $\varepsilon > 0$. عندها يوجد هنالك تجزئتان P_1

و P_2 بحيث أن

$$U(P_2, f, \alpha) - \int f\,d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (١٤)$$

$$\int f\,d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \ . \qquad (١٥)$$

نختار P لتكون المنقح المشترك لـ P_1، P_2. عندها فإن المبرهنة ٦، ٤، مع (١٤) و(١٥)، تبين أن

$$U(P, f, \alpha) \le U(P_2 f, \alpha) < \int f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \le L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon\ ,$$

لذلك فإن (١٣) تتحقق لهذا القاطع P .

إن المبرهنة ٦، ٦ تقدم لنا قاعدةً مريحاً للقابلية على التكامل. قبل تطبيقها، نذكر بعض الحقائق الوثيقة الصلة.

٦، ٧ مبرهنة:

(أ) إذا كانت (١٣) تتحقق لبعض P وبعض ε، فإن (١٣) تتحقق (لنفس الـ ε) لكل منقح لـ P .

(ب) إذا كانت (١٣) تتحقق لـ $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ وإذا كانت s_i , t_i نقطتين عشوائيتين في $[x_{i-1}, x_i]$، فإن

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \varepsilon \ .$$

(ج) إذا كان $f \in \Re(\alpha)$ وافتراضات (ب) متحققة، فإن

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon \ .$$

البرهان: نستدل على (أ) من المبرهنة ٦، ٤. بموجب الافتراضات المذكورة في (ب)، فإن كلاً من $f(s_i)$ و $f(t_i)$ تقع في $[m_i, M_i]$، لذلك فإن $|f(s_i) - f(t_i)| \le M_i - m_i$. لذلك

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i \le U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha),$$

والتي تبرهن (ب). أن المتباينتين الواضحتين

$$L(P, f, \alpha) \le \sum f(t_i)\Delta\alpha_i \le U(P, f, \alpha)$$

و

$$L(P,f,\alpha) \le \int f d\alpha \le U(P,f,\alpha)$$

تبرهنان (ج).

٦، ٨ مبرهنة: *إذا كانت f مستمرة في $[a,b]$ فإن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$.*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. نختار $\eta > 0$ بحيث أن

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon \ .$$

بما أن f مستمرة بانتظام في $[a,b]$ (المبرهنة ٤، ١٩)، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(x) - f(t)| < \eta \qquad (١٦)$$

إذا كانت $x \in [a,b]$, $t \in [a,b]$، و $|x-t| < \delta$.

إذا كانت P أي تجزئة في $[a,b]$ بحيث أن $\Delta x_i < \delta$ لجميع i، فإن (١٦) تدل على

$$M_i - m_i \le \eta \qquad (i - 1,\ldots,n) \qquad (١٧)$$

ولذلك فإن

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i$$

$$\le \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

استناداً للمبرهنة ٦، ٦ ، فإن $f \in \Re(\alpha)$.

٦، ٩ مبرهنة: *إذا كانت f رتيبة في $[a,b]$، وإذا كانت α مستمرة في $[a,b]$، فإن $f \in \Re(\alpha)$. (بالطبع، فإننا لازلنا نفترض بأن، α رتيبة).*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. لأي عدد صحيح موجب n، نختار تجزئة بحيث أن

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

إن هذا ممكناً نظراً لأن α مستمرة (المبرهنة ٤، ٢٣).

نفترض أن f متزايدة ترتيبا (يكون البرهان متشابهاً في الحالة الأخرى). عندها فإن

$$M_i = f(x_i) \quad , \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad , \quad (i = 1,\ldots,n)$$

لذلك فإن

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]$$
$$=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\cdot\left[f(b)-f(a)\right]<\varepsilon$$

إذا أخذت n كبيرة بما فيه الكفاية . استناداً للمبرهنة ٦، ٦ ، فإن $f\in\Re(\alpha)$.

٦، ١٠ مبرهنة: *لنفترض أن f مقيدة في $[a,b]$، f تمتلك نقاطاً منتهية فقط من عدم الاستمرارية في $[a,b]$، و α مستمرة في كل نقطة تكون فيها f غير مستمرة . عندها فإن $f\in\Re(\alpha)$.*

البرهان: لنأخذ $\varepsilon>0$. نضع $M=\sup|f(x)|$ ، لتكن E مجموعة النقاط التي تكون f غير مستمرة فيها. بما أن E منتهيا و α مستمرة عند كل نقطة من E، فإن بإمكاننا أن نغطي E بواسطة فترات منفصلة منتهية $[u_j,v_j]\subset[a,b]$ بحيث أن مجموع الفروق المتناظرة $\alpha(v_j)-\alpha(u_j)$ يكون اقل من ε. إضافة لذلك، بإمكاننا أن نضع هذه الفترات بالطريقة التي تكون فيها كل نقطة من $E\cap(a,b)$ تقع في القسم الداخلي من $[u_j,v_j]$.

ابعد القطع (u_j,v_j) من $[a,b]$. المجموعة المتبقية K تكون متراصة. إذن f تكون مستمرة بانتظام في K ، ويوجد هنالك $\delta>0$ بحيث أن $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$ إذا كانت $s\in K$, $t\in K$, $|s-t|<\delta$.

الآن تشكل التجزئة $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ لـ $[a,b]$، كما يلي: كل u_j تقع في P. كل v_j تقع في P. لا تقع أي نقطة من القطعة (u_j,v_j) في P . إذا لم تكن x_{i-1} واحد من الـ u_j، فإن $\Delta x_i<\delta$.

لاحظ بأن $M_i-m_i\le 2M$ لكل I، وأن $M_i-m_i\le\varepsilon$ ما لم تكن x_{i-1} واحد من ألـ u_j . أذن كما في برهان المبرهنة ٦، ٨،

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\le\left[\alpha(b)-\alpha(a)\right]\varepsilon+2M\varepsilon\ .$$

بما أن ε عشوائية، فإن المبرهنة ٦، ٦ تبين أن $f\in\Re(\alpha)$.

ملاحظة: إذا كانت f و α تمتلكان نقطة عدم استمرارية مشتركة، فإن f قد لا تكون في $\Re(\alpha)$. التمرين ٣ يبين ذلك.

٦، ١١ مبرهنة: *لنفترض أن* $f \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$ ، $m \le f \le M$، *مستمرة* ϕ *في* $[m,M]$، *و* $h(x) = \phi(f(x))$ *في* $[a,b]$ *عندها فإن* $h \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$.

البرهان: نختار $\varepsilon > 0$. بما أن ϕ مستمرة بانتظام في $[m,M]$، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن $\delta < \varepsilon$ و $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ إذا كانت $|s-t| \le \delta$ و $s,t \in [m,M]$.

بما أن $f \in \Re(\alpha)$ ، يوجد هنالك تجزئة $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ لـ $[a,b]$ بحيث أن

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \delta^2 \ . \qquad (١٨)$$

لتكن M_i و m_i تمتلكان نفس المعنى كما في التعريف ٦، ١، و لتكن $M_i{}^*$ ، $m_i{}^*$ العدديين المناظرين لـ h. قسم الأعداد $1,\ldots,n$ إلى طبقتين: $i \in A$ إذا كانت $M_i - m_i < \delta$ ، $i \in B$ إذا كانت $M_i - m_i \ge \delta$. بالنسبة لـ $i \in A$ ، فإن اختيارنا لـ δ يبين أن $M^*_i - m_i{}^* \le \varepsilon$ بالنسبة لـ $i \in B$ ، $M^*_i - m_i{}^* \le 2K$ ، حيث $K = \sup|\phi(t)|$ ، $m \le t \le M$. استناداً إلى (١٨)، لدينا

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \le \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \delta^2 \qquad (١٩)$$

لذلك فإن $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. يؤدي ذلك إلى أن

$$U(P,h,\alpha) - L(P,h,\alpha) = \sum_{i \in A} (M^* - m^*)\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M^* - m^*)\Delta\alpha_i$$

$$\le \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K].$$

بما أن ε كانت عشوائية، فإن المبرهنة ٦، ٦ تدل على أن $h \in \Re(\alpha)$.

ملاحظة: أن هذه المبرهنة تثير السؤال الأتي: ما هي الدوال التي تكون قابلة للتكامل الريماني ؟ الجواب على ذلك مقدم في المبرهنة ١١، ٣٣ (ب).

خواص التكامل Properties Of The Integral

٦، ١٢ مبرهنة:

(أ) *إذا كانت* $f_1 \in \Re(\alpha)$ *و* $f_2 \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$، *فإن*

$f_1 + f_2 \in \Re(\alpha)$ ،

$cf \in \Re(\alpha)$ *لكل ثابت* c ،

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\,d\alpha = \int_a^b f_1\,d\alpha + \int_a^b f_2\,d\alpha \,,$$

$$\int_a^b cf\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha \ .$$

(ب) إذا كانت $f_1(x) \le f_2(x)$ في $[a,b]$، فإن

$$\int_a^b f_1\,d\alpha \le \int_a^b f_2\,d\alpha \ .$$

(ج) إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$ وكانت $a<c<b$ ، فإن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,c]$ وعلى $[c,d]$، و

$$\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha \ .$$

(د) إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$ وكانت $|f(x)| \le M$ في $[a,b]$، فإن

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le M[\alpha(b)-\alpha(a)] \ .$$

(هـ) إذا كانت $f \in \Re(\alpha_1)$ و $f \in \Re(\alpha_2)$ ، فإن $f \in \Re(\alpha_1+\alpha_2)$ و

$$\int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2;$$

إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$ و c ثابتا موجبا، فإن $f \in \Re(c\alpha)$ و

$$\int_a^b fd(c\alpha) = c\int_a^b fd\alpha \ .$$

البرهان: إذا كانت $f = f_1 + f_2$ و P أي تجزئة لـــ $[a,b]$، فإن لدينا

$$\begin{aligned} L(P,f_1,\alpha)+L(P,f_2,\alpha) &\le L(P,f,\alpha) \\ &\le U(P,f,\alpha) \le U(P,f_1,\alpha)+U(P,f_2,\alpha) \end{aligned} \qquad (٢٠)$$

إذا كانت $f_1 \in \Re(\alpha)$ و $f_2 \in \Re(\alpha)$، لنأخذ $\varepsilon > 0$. يوجد هنالك تجزئتان P_j $(j=1,2)$ بحيث أن

$$U(P_j,f_j,\alpha) - L(P_j,f_j,\alpha) < \varepsilon \ .$$

تحافظ هذه المتباينات على تحققها إذا ما أستبدل P_1 و P_2 بمنقحهما المشترك P . عندها فإن (٢٠) تؤدي إلى

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < 2\varepsilon ,$$

والتي تبرهن على أن $f \in \Re(\alpha)$.

لنفس هذا ألـــ P لدينا

$$U(P,f_j,\alpha) < \int f_j d\alpha + \varepsilon \qquad (j=1,2) ;$$

إذن فإن (٢٠) تؤدي إلى

$$\int f\,d\alpha \le U(P,f,\alpha) < \int f_1\,d\alpha + \int f_2\,d\alpha + 2\varepsilon\ .$$

بما أن ε كانت عشوائية، فإننا نستنتج بأن

$$\int f\,d\alpha \le \int f_1\,d\alpha + \int f_2\,d\alpha\ . \qquad (٢١)$$

إذا ما استبدلنا f_1 و f_2 في (٢١)بـ $-f_1$ و $-f_2$ ، فإن المتباينة سوف تنعكس، وتتم برهنة المساواة.

إن براهين الفروع الأخرى من المبرهنة ٦، ١٢ مشابهة جداً لهذا البرهان لذلك سوف لا ندخل في تفاصيلها. في الفرع (ج)، النقطة الأساسية هي (بالعبور إلى المنقحة) إننا بإمكاننا أن نحدد نفسنا للتجزئات التي تحتوي على النقطة c، في التقريب $\int f\,d\alpha$.

٦، ١٣ مبرهنة: *إذا كانت* $f \in \Re(\alpha)$ *و* $g \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$*، فإن*

(أ) $fg \in \Re(\alpha)$ ؛

$$|f| \in \Re(\alpha) \text{ و } \left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\,d\alpha\ .$$

البرهان: إذا أخذنا $\phi(t) = t^2$ ، تبين المبرهنة ٦، ١١ بأن $f^2 \in \Re(\alpha)$ إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$. المتطابقة

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

تكمل برهنة (أ).

إذا أخذنا $\phi(t) = |t|$، تبين المبرهنة ٦، ١١ أيضا أن $|f| \in \Re(\alpha)$. نختار $c = \pm 1$، بحيث أن

$$c\int f\,d\alpha \ge 0$$

عندها فإن

$$\left|\int f\,d\alpha\right| = c\int f\,d\alpha = \int cf\,d\alpha \le \int |f|\,d\alpha,$$

بما أن $cf \le |f|$.

٦، ١٤ تعريف: نعرف *دالة الوحدة السلمية* ***unit step function*** I بـ

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

٦، ١٥ مبرهنة: *إذا كانت $a < s < b$، وكانت f مقيدة في $[a,b]$، f مستمرة في s، وكانت $\alpha(x) = I(x-s)$، فإن*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

البرهان: لاحظ التجزئة $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$، حيث $x_0 = a$، و $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. فإن

$$U(P,f,\alpha) = M_2, \qquad L(P,f,\alpha) = m_2.$$

بما أن f مستمرة في s، نلاحظ أن M_2 و m_2 تتقاربان إلى $f(s)$ عندما $x_2 \to s$.

٦، ١٦ مبرهنة: *نفترض أن $c_n \geq 0$ لـ $1,2,3,...$ ، $\sum c_n$ تتقارب، $\{s_n\}$ متتالية من النقاط المنفصلة في (a,b)، و*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n). \tag{٢٢}$$

لتكن f مستمرة في $[a,b]$. فإن

$$\int_a^b f\, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n) . \tag{٢٣}$$

البرهان: يبين اختبار المقارنة أن المتتالية (٢٢) تتقارب لكل x. من الواضح أن مجموعها $\alpha(x)$ رتيباً، و $\alpha(a) = 0$ ، $\alpha(b) = \sum c_n$. (هذا هو نوع الدالة التي تحدث في الملاحظة ٤، ٣١).

لنأخذ $\varepsilon > 0$، ونختار N بحيث أن $\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$

نضع $\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n) \qquad , \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$

استناداً للمبرهنتين ٦، ١٢ و ٦، ١٥،

$$\int_a^b f\, d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n) . \tag{٢٤}$$

بما أن $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$ ،

$$\left| \int_a^b f\, d\alpha_2 \right| \leq M\varepsilon , \tag{٢٥}$$

حيث $M = \sup|f(x)|$. بما أن $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ، نستنتج من (٢٤) و (٢٥) بأن

$$\left|\int_a^b f\ d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)\right| \le M\varepsilon \ . \qquad (٢٦)$$

إذا تركنا $N \to \infty$ ، فإننا نحصل على (٢٣).

٦، ١٧ مبرهنة: *افترض أن α تتزايد ترتيبياً وإن $\alpha' \in \Re$ في $[a,b]$. لتكن f دالة حقيقية مقيدة في $[a,b]$.*

عندها فإن $f \in \Re(\alpha)$ إذا وإذا فقط كانت $f\alpha' \in \Re$. في تلك الحالة

$$\int_a^b f\ d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \ . \qquad (٢٧)$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$ ونطبق المبرهنة ٦، ٦ على α' : يوجد هنالك تجزئة $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ لـــ $[a,b]$ بحيث أن

$$U(P,\alpha') - L(P,\alpha') < \varepsilon \ . \qquad (٢٨)$$

تقدم لنا مبرهنة القيمة الوسطية النقاط $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ بحيث أن

$$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i$$

بالنسبة لـــ $i = 1, \ldots, n$. إذا كانت $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، فإن

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i < \varepsilon , \qquad (٢٩)$$

استناداً لـــ (٢٨) والمبرهنة ٦، ٧ (ب). نضع $M = \sup|f(x)|$. بما أن

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$

نستنتج من (٢٩) أن

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right| \le M\varepsilon \ . \qquad (٣٠)$$

وعلى وجه الخصوص،

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \le U(P, f\alpha') + M\varepsilon \ .$$

لجميع الخيارات لـــ $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، لذلك فإن

$$U(P, f, \alpha) \le U(P, f\alpha') + M\varepsilon \ .$$

نفس المناقشة، من (٣٠) تؤدي إلى أن

$$U(P, f\alpha') \le U(P, f, \alpha) + M\varepsilon.$$

لذلك فإن

$$|U(P, f, \alpha) - U(P, f\alpha')| \le M\varepsilon. \qquad (٣١)$$

الآن لاحظ بأن (٢٨) تبقى صحيحة إذا استبدلنا P بأي منقحة. إذن (٣١) تبقى صحيحة أيضا. نستنتج أن

$$\left|\int_a^{-b} f\,d\alpha - \int_a^{-b} f(x)\alpha'(x)dx\right| \le M\varepsilon.$$

ولكن ε عشوائية. إذن

$$\int_a^{-b} f\,d\alpha = \int_a^{-b} f(x)\alpha'(x)dx, \qquad (٣٢)$$

لأي f مقيدة. أن مساواة المتكاملات السفلي تستنتج من (٣٠) بنفس الطريقة بالضبط. وتستنتج المبرهنة بذلك.

٦، ١٨ ملاحظة: أن المبرهنتين السابقتين توضحان العمومية والمرونة اللتين تتمتع بهما معالجة ستيلجيز للتكامل. إذا كانت α دالة سلمية تامة [هذه التسمية التي تطلق عادة على الدوال التي تكون بالشكل (٢٢)] ، فإن المتكامل يتحول إلى متسلسلات منتهية أو لانهائية. إذا كانت α تمتلك مشتقة قابلة للتكامل فإن، المتكامل يتحول إلى متكامل ريمان بسيط. أن ذلك يجعل من المستطاع وفي حالات عديدة دراسة المتسلسلات والمتكامل بصوره آنية، بدلاً من دراستها بشكل منفصل.

لتوضيح هذه النقطة، لنأخذ مثلاً فيزياويا . أن عزم القصور للسلك المستقيم بوحدة طول، حول محور خلال نقطة نهاية، على الزوايا اليمنى للسلك، هو

$$\int_0^1 x^2\,dm \qquad (٣٣)$$

حيث أن $m(x)$ هي الكتلة المحتواة في الفترة $[0, x]$. إذا اعتبرنا أن السلك يمتلك كثافة مستمرة ρ ، أي أن، إذا $m'(x) = \rho(x)$، فإن (٣٣) تتحول إلى

$$\int_0^1 x^2 \rho(x)dx \ . \qquad (٣٤)$$

من جهة أخرى، إذا كان السلك يتألف من الكتل m_i المذكورة في النقاط x_i ، فإن (٣٣) تصبح

$$\sum_i x_i^2 m_i \quad . \tag{٣٥}$$

لذلك فإن (٣٣) تحتوي على (٣٤) و(٣٥) كحالتين خاصتين، ولكنها تحتوي على أكثر من ذلك بكثير، على سبيل المثال، الحالة التي تكون فيها m مستمرة ولكن ليست قابلة للتفاضل في كل مكان.

٦، ١٩ مبرهنة (تغير المتغير) (Change Of Variable)

لنفترض أن φ دالة مستمرة متزايدة بشكل تام والتي تطبق الفترة $[A,B]$ في (on to) $[a,b]$. لنفترض أن α متزايدة ترتيبياً في $[a,b]$ وإن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$. عرف β و g في $[A,B]$ بما يلي

$$g(y) = f(\varphi(y)) \quad , \quad \beta(y) = \alpha(\varphi(y)) \quad . \tag{٣٦}$$

عندها فإن $g \in \Re(\beta)$ و

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha \quad . \tag{٣٧}$$

البرهان: لكل تجزئة $P = \{x_0, \dots, x_0\}$ لـ $[a,b]$ عينت التجزئة المناظرة $Q = \{y_0, \dots, y_n\}$ لـ $[A,B]$ ، بحيث أن $x_i = \varphi(y_i)$. يتم الحصول على جميع التجزئات لـ $[A,B]$ بهذه الطريقة. بما أن القيم التي تأخذها f في $[x_{i-1}, x]$ هي بالضبط نفس القيم التي تأخذها g في $[y_{i-1}, y]$، فإننا نلاحظ بأن

$$L(Q,g,\beta) = L(P,f,\alpha) \quad , \quad U(Q,g,\beta) = U(P,f,\alpha) \quad . \tag{٣٨}$$

بما أن $f \in \Re(\alpha)$ ، فإن بالإمكان اختيار P بحيث أن كلاً من $U(P,f,\alpha)$ و $L(P,f,\alpha)$ تكونان قريبتين إلى $\int f d\alpha$ إذن (٣٨)، مع المبرهنة ٦، ٦، تبين أن $g \in \Re(\beta)$ وإن (٣٧) تتحقق. وهذا يكمل البرهان.

لنلاحظ الحالة الخاصة الآتية:

لنأخذ $\alpha(x) = x$. ثم $\beta = \alpha$. لنفرض أن $\varphi' \in \Re$ في $[A,B]$. إذا طبقنا المبرهنة ٦، ١٧ على الجزء الأيسر من (٣٧)، فإننا نحصل على

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \quad . \tag{٣٩}$$

التكامل والتفاضل Integration And Differentiation

لا نزال نحدد أنفسنا في التعامل مع الدوال الحقيقية في هذا القسم. سوف نبين أن التكامل والتفاضل هما، بمعنى أو بأخر، عمليتان متعاكستان.

٦، ٢٠ مبرهنة: *لتكن $f \in \Re$ في $[a,b]$. بالنسبة إلى $a \le x \le b$ ، نضع*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

عندها فإن F تكون مستمرة في $[a,b]$ ؛إضافة لذلك ؛إذا كانت f مستمرة عند النقطة x_0 لـــ $[a,b]$ فإن f تكون قابلة للتفاضل عند x_0 ، و

$$F'(x_0) = f(x_0) \ .$$

البرهان: بما أن $f \in \Re$ ، فإن f تكون مقيدة . افترض أن $|f(t)| \le M$ بالنسبة إلى $a \le t \le b$ إذا كانت $a \le x < y \le b$، فإن

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le M(y-x),$$

استناداً للمبرهنة ٦، ١٢ (ج) و (د)، لنأخذ $0 < \varepsilon$، فإننا نلاحظ أن

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

شريطة أن تكون $|y-x| < \varepsilon/M$. أن هذا يبرهن استمرارية (و، في الحقيقة، الاستمرارية المنتظمة) لـــ F.

الآن أفترض أن f مستمرة عند x_0. لنأخذ $0 < \varepsilon$، نختار $0 < \delta$ بحيث أن

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

إذا كانت $|t - x_0| < \delta$، و $a \le t \le b$. إذن، إذا كانت

$$x_0 - \delta < s \le x_0 \le t < x_0 + \delta \text{ و } a \le s < t \le b \text{ ،}$$

فإننا نملك، استناداً للمبرهنة ٦، ١٢ (د)،

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t-s} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t-s}\int_s^t [f(u) - f(x_0)]du\right| < \varepsilon \ .$$

نستنتج من ذلك أن $F'(x_0) = f(x_0)$.

٦، ٢١ المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل

The fundamental theorem of calculus

إذا كانت $f \in \Re$ في $[a,b]$ وإذا كان هنالك الدالة F القابلة للتفاضل في $[a,b]$ بحيث أن $F' = f$، فإن

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. ونختار التجزئة $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ لـ$[a,b]$ بحيث أن $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$. تقدم لنا مبرهنة القيمة الوسطية النقاط $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ بحيث أن

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$$

بالنسبة إلى $i = 1, \ldots, n$. لذلك فإن

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

ونستنتج الآن من المبرهنة ٦، ٧ (ج) بأن

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

بما أن هذا يتحقق لجميع $\varepsilon > 0$، إذن يعتبر البرهان مكتملاً .

٦، ٢٢ مبرهنة (التكامل بالتجزئة) (Integration By Parts) *لنفترض أن F و G دالتان قابلتان للتفاضل في $[a,b]$، $F' = f \in \Re$، و $G' = g \in \Re$. عندها فإن*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

البرهان: ضع $H(x) = F(x)G(x)$ وطبق المبرهنة ٦، ٢١ على H ومشتقتها. لاحظ أن $H' \in \Re$، استناداً للمبرهنة ٦، ١٣.

تكامل دوال القيمة المتجهة

Integration Of Vector-Valued Functions

٦، ٢٣ تعريف: لتكن $f_1, \ldots, f_k$ دولاً حقيقية في $[a,b]$، ولتكن $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ التطبيق المناظر لـ $[a,b]$ في $\mathbf{R}^k$. إذا كانت α تتزايد ترتيبا في $[a,b]$، فإننا نقول أن

$\mathbf{f} \in \Re(\alpha)$ يعني بأن $f_j \in \Re(\alpha)$ بالنسبة إلى $j = 1,\ldots,k$. إذا كانت هذه الحالة، فإننا نعرف

$$\int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha,\ldots,\int_a^b f_k d\alpha\right).$$

بكلمة أخرى، تكون $\int \mathbf{f} d\alpha$ هي النقطة $\mathbf{R}^k$. التي احداثيتها ألـ jth هو $\int f_j d\alpha$.

من الواضح أن الفروع (أ)، (ج) و (هـ) من المبرهنة ٦، ١٢ تتحقق بالنسبة لهذه المتكاملات ذات القيم المتجهة ؛ نقوم بمجرد تطبيق النتائج السابقة على كل إحداثي. نفس الشيء يصح على المبرهنات ٦، ١٧ ، ٦، ٢٠، و ٦، ٢١ لتوضيح ذلك، ندرج أدناه النظير للمبرهنة ٦، ٢١.

٦، ٢٤ مبرهنة: *إذا كانت* $\mathbf{f}$ *و* $\mathbf{F}$ *تطبيقان* $[a,b]$ *في* $\mathbf{R}^k$*، إذا كانت* $\mathbf{f} \in \Re$ *في* $[a,b]$*، وإذا كانت* $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$*، عندها فإن*

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

إن النظير للمبرهنة ٦، ١٣ (ب) يقدم لنا بعض الخصائص المهمة، على الأقل بالنسبة لبرهانه.

٦، ٢٥ مبرهنة: *إذا كانت* $\mathbf{f}$ *تطبيق* $[a,b]$ *في* $\mathbf{R}^k$ *و إذا كانت* $\mathbf{f} \in \Re(\alpha)$ *لبعض الدوال المتزايدة ترتيبياً* α *في* $[a,b]$*، عندها فإن* $|\mathbf{f}| \in \Re(\alpha)$*، و*

$$\left|\int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha\right| \le \int_a^b |\mathbf{f}|\, d\alpha . \qquad (٤٠)$$

البرهان: إذا كانت $f_1,\ldots,f_k$ المكونات لـ $\mathbf{f}$، عندها فإن

$$|\mathbf{f}| = (f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}. \qquad (٤١)$$

استناداً للمبرهنة ٦، ١١ ، فإن كلاً من الدوال f_i^2 تنتمي إلى $\Re(\alpha)$ ؛ إذن نفس الشيء ينطبق على مجموعها. بما أن x^2 *دالة مستمرة لـ* x ، فإن المبرهنة ٤، ١٧ تبين أن دالة الجذر التربيعي تكون مستمرة في $[0,M]$، لكل M حقيقية. إذا قمنا بتطبيق المبرهنة ٦، ١١ مرة ثانية، فإن (٤١) تبين أن $|\mathbf{f}| \in \Re(\alpha)$.

لبرهنة (٤٠)، ضع $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_k)$، حيث أن $y_j = \int f_j d\alpha$. عندها فإنه لدينا $\mathbf{y} = \int \mathbf{f} d\alpha$، و

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j \int f_j d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j\right) d\alpha .$$

استناداً إلى متباينة شوارز،

$$\sum y_j f_j(t) \le |\mathbf{y}||\mathbf{f}(t)| \qquad (a \le t \le b); \qquad (٤٢)$$

إذن تؤدي المبرهنة ٦، ١٢ (ب) إلى أن

$$|\mathbf{y}|^2 \le |\mathbf{y}|\int |\mathbf{f}|d\alpha \ . \qquad (٤٣)$$

إذا كانت $\mathbf{y} = 0$، فإن (٤٠) تصبح عديمة الأهمية. إذا كانت $\mathbf{y} \neq 0$، فإن تقسيم (٤٣) على $|\mathbf{y}|$ يعطينا (٤٠).

المنحنيات الممكن تعين طول أقواسها Rectifiable Curves

نختتم هذا الفصل بموضوع يعتبر ذو أهمية هندسية والذي يقدم لنا تطبيقاً لبعض المبرهنات السابقة. أن الحالة التي تكون فيها $k = 2$ (أي، حالة المنحنيات المستوية) تعتبر ذات أهمية كبيرة في دراسة الدوال التحليلية للمتغيرات المركبة.

٦، ٢٦ تعريف: نطلق على التطبيق المستمر γ لفترة معينة $[a,b]$ في $\mathbf{R}^k$ *"المنحني" curve* في $\mathbf{R}^k$. لتأكيد الوساطة للفترة $[a,b]$، ممكن أن نقول أيضا بأن γ هي منحني في $[a,b]$.

إذا كانت γ واحد–لواحد، فإن γ تسمى *قوس* ***r c a***.

إذا كانت $\gamma(a) = \gamma(b)$، فإنه يقال أن γ *منحني مغلق* ***closed curve***.

يجب أن نلاحظ هنا بأننا قمنا بتعريف المنحني ليكون تطبيقاً، وليس مجموعة نقاط. بالطبع، فإن كل منحني γ في $\mathbf{R}^k$ يوجد هنالك مجموعة جزئية مرافقه في $\mathbf{R}^k$، بالتحديد المدى لـ γ، ولكن المنحنيات المختلفة قد تمتلك نفس المدى.

نرفق لكل تجزئة $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ لـ $[a,b]$ ولكل منحني γ في $[a,b]$ العدد

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| \ .$$

إن الحد *ith* في هذا المجموع هو المسافة (في $\mathbf{R}^k$) بين النقاط $\gamma(x_{i-1})$ و $\gamma(x_i)$. إذن $\Lambda(P,x)$ هو طول الطريق المضلع الذي تكون رؤوسه في $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \dots, \gamma(x_n)$، بهذا الترتيب. عندما تأخذ تجزئتنا هذه بالتضاؤل، فإن المضلع يقترب إلى المدى γ اكثر فأكثر. أن هذا يجعل بالإمكان تعريف طول γ كالتالي

$$\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(P,\gamma) \, ,$$

حيث أن ألـ sup يكون مأخوذاً فوق جميع التجزئات $[a,b]$.

إذا كانت $\Lambda(\gamma) < \infty$ ، فإننا نقول أن γ ***قابلة لتعين طولها rectifiable***.

في بعض الحالات، تكون $\Lambda(\gamma)$ مقدمة بواسطة المتكامل الريماني . سوف نقوم برهنة ذلك بالنسبة للمنحنيات المستمرة القابلة للتفاضل، أي، بالنسبة للمنحنيات γ التي تكون مشتقاقا γ' مستمرة.

٦، ٢٧ مبرهنة: *إذا كانت γ' مستمرة في $[a,b]$، فإن γ قابلة لتعين طول قوسها، و*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \ .$$

البرهان: إذا كانت $a \le x_{i-1} < x_i \le b$ ، فإن

$$|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt\right| \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt \ .$$

إذن

$$\Lambda(P,\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

لكل تجزئة P لـ $[a,b]$. نتيجة لذلك،

$$\Lambda(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)| dt \ .$$

لبرهنة المتباينة العكسية، لنأخذ $\varepsilon > 0$. بما أن γ' مستمرة بانتظام في $[a,b]$، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$|\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon \quad \text{إذا كانت} \quad |s-t| < \delta \ .$$

لتكن $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزئة لـ $[a,b]$ ، حيث أن $\Delta x_i < \delta$ لجميع i . إذا كانت $x_{i-1} \le t \le x_i$ ، فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$|\gamma'(t)| \le |\gamma'(x_i)| + \varepsilon \ .$$

إذن

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt &\le |\gamma'(x_i)| \Delta x_i + \varepsilon\, \Delta x_i \\
&= \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt\right| + \varepsilon\, \Delta x_i \\
&\le \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt\right| + \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt\right| + \varepsilon\, \Delta x_i \\
&\le |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| + 2\varepsilon\ \Delta x_i .
\end{aligned}$$

إذا جمعنا هذه المتباينة، فإننا نحصل على

$$\begin{aligned}\int_a^b |\gamma'(t)|dt &\le \Lambda(P,\gamma) + 2\varepsilon(b-a)\\ &\le \Lambda(\gamma) + 2\varepsilon\ (b-a).\end{aligned}$$

بما أن δ كانت عشوائية، فإن

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \le \Lambda(\gamma)\ .$$

وهذا يكمل البرهان.

تمارين EXERCISES

١- افترض أن α تتزايد في $[a,b]$، $a \le x_0 \le b$، α مستمرة عند x_0، $f(x_0)=1$، وأن $f(x)=0$ إذا كانت $x \ne x_0$. برهن على أن $f \in \Re(\alpha)$ وأن $\int f d\alpha = 0$.

٢- أفترض أن $f \ge 0$، f مستمرة في $[a,b]$، و $\int_a^b f(x)dx = 0$. برهن على أن $f(x)=0$ لجميع $x \in [a,b]$. [قارن ذلك مع التمرين ١] .

٣- عرف ثلاثة دوال β_1,β_2,β_3 كالتالي: $\beta_j(x)=0$ إذا كانت $x<0$, $\beta_j(x)=1$ إذا كانت $x>0$ بالنسبة إلى $j=1,2,3$ ؛ و $\beta_1(0)=0$, $\beta_2(0)=1$, $\beta_3(0)=\frac{1}{2}$. لتكن f دالة مقيدة في $[-1,1]$.

(أ) برهن على أن $f \in \Re(\beta_1)$ إذا وإذا فقط كانت $f(0+)=f(0)$ وبأن ذلك يؤدي إلى أن

$$\int f d\beta_1 = f(0) \ .$$

(ب) قم بصياغة وبرهنة نتيجة مشابهة لـــ β_2 .

(ج) برهن على أن $f \in \Re(\beta_3)$ إذا وإذا فقط كانت f مستمرة عند 0 .

(د) إذا كانت f مستمرة عند 0، برهن على أن

$$\int f d\beta_1 = \int f d\beta_2 = \int f d\beta_3 = f(0) \ .$$

٤- إذا كانت $f(x)=0$ لجميع الأعداد الغير نسبية x، $f(x)=1$ لجميع الأعداد النسبية x، برهن على أن $f \notin \Re$ في $[a,b]$ بالنسبة لأي $a<b$.

٥- افترض أن f دالة حقيقية مقيدة في $[a,b]$، وإن $f^2 \in \Re$ في $[a,b]$. هل يؤدي ذلك إلى أن $f \in \Re$ ؟ وهل يتغير الجواب إذ ا افترضنا أن $f^3 \in \Re$ ؟

٦- لتكن P مجموعة كانتور التي شكلت في البند ٢، ٤٤ . لتكن f دالة حقيقية مقيدة في $[0,1]$ والتي تكون مستمرة عند كل نقطة خارج P. برهن على أن $f \in \Re$ في $[0,1]$.

تلميح: بالإمكان تغطية P بواسطة قطع عديدة منتهية والتي يكون بالإمكان جعل مجموع أطوالها بالصغر الذي نريده. أستمر كما في المبرهنة ٦، ١٠.

٧- افترض أن f دالة حقيقية في $(0,1]$ وإن $f \in \Re$ في $[c,1]$ لكل $c>0$.

عرف $$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{c\to 0}\int_c^1 f(x)dx$$

إذا كانت هذه الغاية موجودة (وكانت منتهية).

(أ) إذا كانت $f \in \Re$ في $[0,1]$ ، بين أن هذا التعريف للمتكامل يرافق التعريف القديم.

(ب) شكِل الدالة f بحيث أن الغاية تكون موجودة، على الرغم من إنها تخفق في أن تكون موجودة إذا ما وضعنا $|f|$ بدلاً من f.

٨- افترض أن $f \in \Re$ في $[a,b]$ لكل $b > a$ حيث أن a ثابتة. عرف

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

إذا كانت هذه الغاية موجودة (وكانت منتهية). في هذه الحالة، فإننا نقول أن المتكامل من الجهة اليسرى يتقارب. إذا كان يتقارب أيضا بعد أن نستبدل f بـــ $|f|$ ، فإننا نقول أنه يتقارب بصورة مطلقة.

افترض أن $f(x) \geq 0$ وإن f تتناقص ترتيبياً في $[1,\infty)$ برهن على أن

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

تتقارب إذا وإذا فقط كانت

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

تتقارب. (هذا هو ما نطلق علية *"اختبار المتكامل"* ***integral test*** لتقارب المتسلسلات.

٩- بين أنه بالإمكان تطبيق التكامل بالتجزئة على المتكاملات الغير اعتيادي **"improper"** المعرفة في التمرينين ٧و٨. (قم بصياغة الافتراضات المناسبة، كون مبرهنة، وقم ببرهنتها). على سبيل المثال بين أن

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx \ .$$

بين أن واحد من هذين المتكاملين يتقارب بصورة مطلقة، ولكن الثاني لا يفعل ذلك.

١٠- ليكن p و q عددين حقيقيين موجبين بحيث أن

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ .$$

برهن العبارات الآتية :

(أ) إذا كانت $u \geq 0$ و $v \geq 0$، فإن

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \ .$$

المساواة تتحقق إذا وإذا فقط كانت $u^p = v^q$.

(ب) إذا كانت $f \in \Re(\alpha)$, $g \in \Re(\alpha)$ ، $f \geq 0$, $g \geq 0$ ، و

$$\int_a^b f^p d\alpha = 1 = \int_a^b g^q d\alpha$$

فإن
$$\int_a^b fg \, d\alpha \leq 1 \ .$$

(ج) إذا كانت f و g دالتين مركبتين في $\Re(\alpha)$ ، عندها فإن

$$\left|\int_a^b fg d\alpha\right| \leq \left\{\int_a^b |f|^p d\alpha\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |g|^q d\alpha\right\}^{1/q} \ .$$

هذه هي *متباينة هولدر* $H\ddot{o}lder'$ s *inequlity* . عندما تكون $p = q = 2$ فغالباً ما يطلق عليها متباينة شوارز . (لاحظ بأن المبرهنة ١، ٣٥ هي حالة خاصة جداً من هذه الحالة).

(د) بين أن متباينة هولدر تصح أيضاً بالنسبة للمتكاملات " الغير اعتيادية " الموصوفتين في التمرينين ٧ و٨.

١١- لتكن α دالة معينة متزايدة في $[a,b]$. بالنسبة لـ $u \in \Re(\alpha)$، عرف

$$\|u\|_2 = \left\{\int_a^b |u|^2 d\alpha\right\}^{1/2} \ .$$

افترض أن $f, g, h \in \Re(\alpha)$ ، وبرهن متباينة المثلث

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

وكنتيجة لمتباينة شوارز، كما في برهان المبرهنة ١، ٣٧.

١٢- وفقاً لمجموعة الرموز المذكورة في التمرين ١١، أفترض أن $f \in \Re(\alpha)$ و $\varepsilon > 0$. برهن على انه يوجد هنالك دالة مستمرة g في $[a,b]$ بحيث أن $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

تلميح: لتكن $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ تجزئة مناسبة لـ $[a,b]$، عرف

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i)$$

إذا كانت $x_{i-1} \le t \le x_i$.

١٣- عرف $f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)dt$.

(أ) برهن على أن $|f(x)| < 1/x$ إذا كانت $x > 0$.

تلميح: ضع $t^2 = u$ و كامل بالتجزئة، لتبين أن $f(x)$ تكون مساوية لــ

$$\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du.$$

استبدل $\cos. u$ بــ -1 .

(ب) برهن على أن $2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x)$

حيث أن $|r(x)| < c/x$ و c ثابتة.

(ج) أوجد الغايتين العليا والسفلي لــ $f(x)$ عندما $x \to \infty$.

هل أن $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ تتقارب ؟

١٤- تناول بنفس الطريقة مع

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t)dt \ .$$

بين أن
$$e^x|f(x)| < 2$$

وأن
$$e^x f(x) = \cos(e^x) - e^{-1}\cos(e^{x+1}) + r(x),$$

حيث أن $|r(x)| < Ce^{-x}$ ، لبعض C ثابتة.

١٥- أفترض أن f دالة حقيقية، مستمرة قابلة للتفاضل في $[a,b]$. $f(a) = f(b) = 0$ ، و

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1 \ .$$

برهن على أن
$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\tfrac{1}{2}$$

وأن
$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx > \tfrac{1}{4}.$$

١٦- بالنسبة لــ $1 < s < \infty$ ، عرف

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

(هذه دالة زيتا الريمانية **Riemann's zeta Function** والتي تحمل أهمية كبيرة في دراسة توزيع الأعداد الأولية). برهن أن :

(أ) $\zeta(s) = s\int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$

وأن

(ب) $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$،

حيث أن $[x]$ ترمز إلى أكبر عدد صحيح $\leq x$.

برهن على أن المتكامل في (ب) يتقارب بالنسبة لجميع $s > 0$.

تلميح: لبرهنة (أ)، احتسب الفرق بين المتكامل فوق $[1,N]$ والمجموع الجزئي لـ **Nth** للمتسلسلات التي تعرف $\zeta(s)$.

١٧- أفترض أن α تتزايد ترتيبياً في $[a,b]$، g مستمرة، و $g(x) = G'(x)$ بالنسبة إلى $a \leq x \leq b$. برهن على أن

$$\int_a^b \alpha(x)g(x)dx = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \int_a^b G d\alpha.$$

تلميح: خذ g حقيقية، بدون إي خسارة في العمومية. لتكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$، اختار $t \in (x_{i-1}, x_i)$ بحيث أن $g(t_i)\Delta x_i = G(x_i) - G(x_{i-1})$. بين أن

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)g(t_i)\Delta x_i = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \sum_{t=i}^{n} G(x_{i-1})\Delta\alpha_i ..$$

١٨- لتكن $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ منحنيات في المستوي المركب معرف في $[0,2\pi]$ بـ

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{2\pi it\sin(1/t)}.$$

بين أن هذه المنحنيات الثلاثة تمتلك نفس المدى، وأن γ_1, γ_2 قابلتين لتعين طول قوسيهما، وإن طول γ_1 هو 2π ، وإن طول γ_2 هو 4π، وإن γ_3 غير قابلة لتعين طول قوسها.

١٩- لتكن γ_1 منحنياً في $\mathbf{R}^k$، معرفاً في $[a,b]$ ، لتكن ϕ تطبيقاً مستمراً **1-1** لـ $[c,d]$ في $[a,b]$، بحيث أن $\phi(c) = a$ ؛ وعرف $\gamma_2(s) = \gamma_1(\varphi(s))$. برهن على أن γ_2 تكون قوساً، منحنياً مغلقاً، أو منحنياً قابلاً لتعين طول قوسه إذا وإذا فقط كان نفس الشيء يصح على γ_1. برهن على أن γ_2 و γ_1 تمتلكان نفس الطول.

الفصل السابع

المتتاليات والمتسلسلات الدوال

- مناقشة المسألة الرئيسية
- التقارب المنتظم
- التقارب المنتظم والاستمرارية
- التقارب المنتظم و التكامل
- التقارب المنتظم و التفاضل
- عوائل الدوال المتساوية الاستمرارية
- مبرهنة ستون - ويرستراس
- تمارين

الفصل السابع

متتاليات ومتسلسلات الدوال

Sequences And Series Of Function

سوف نحدد اهتمامنا في هذا الفصل على الدوال ذات القيم ـ المركبة (بضمنها الدوال ذات القيم الحقيقية بالطبع)، على الرغم من إن العديد من المبرهنات والبراهين المتعلقة بها بالإمكان توسيعها بدون أي صعوبة لتشمل الدوال ذات القيم المتجهة، وحتى بالنسبة للتطبيق في الفضاءآت المترية العامة. إن اختيارنا للبقاء ضمن هذا الإطار البسيط ينبع من رغبتنا بتركيز اهتمامنا على اكثر النواحي أهمية بخصوص المسائل التي تبرز عندما تكون معالجات الغاية متبادلة.

مناقشة المسألة الرئيسية Discussion Of Main Problem

٧، ١ تعريف: أفترض أن $\{f_n\}$ ، $n = 1,2,3,\ldots$ متتالية من الدوال المعرفة في المجموعة E، وأفترض أن متتالية الأعداد $\{f_n(x)\}$ تتقارب لكل $x \in E$. عندها نستطيع نعرف الدالة f بما يلي

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E) . \tag{١}$$

تحت هذه الظروف نقول أن $\{f_n\}$ تتقارب في E و أن f هي *الغاية* ***limit***، أو ***دالة الغاية*** لـــ $\{f_n\}$ ***limit function, of***. في بعض الأحيان سوف نستخدم اصطلاحات اكثر تعبيراً ونقول $\{f_n\}$ "تتقارب إلى f من ناحية النقاط (*نقطيــاً*) ***pointwise*** في E" إذا كانت (١) تتحقق. وبنفس الطريقة، إذا كانت $\sum f_n(x)$ تتقارب لكل $x \in E$، وإذا عرفنا

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{٢}$$

تسمى الدالة f ***بمجموع sum*** المتسلسلة $\sum f_n$.

إن المسألة الرئيسية التي تثار هنا هي مسألة تحديداً محافظة بعض الخصائص الرئيسية للدوال أثناء عمليتي الغاية (١) و(٢). على سبيل المثال، إذا كانت الدوال f_n مستمرة، أو قابلة للتفاضل، أو قابلة للتكامل، هل يصح نفس الشيء على دالة الغاية ؟ما هي العلاقة بين f_n'

و f'، أو بين المتكاملات لـ f_n و لـ f؟عندها نقول أن f مستمرة في x فإن ذلك يعني أن

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x).$$

إذن، عندها نسأل فيما إذا كانت الغاية لمتتالية من الدوال المستمرة مستمرة مشابهاً لسؤالنا فيما إذا كانت

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) \quad , \qquad (٣)$$

أي، فيما إذا كان الترتيب الذي تتم به عمليات الغاية لا يعني شيئاً. في الجهة اليسرى من (٣)، ندع أولا $n \to \infty$، ثم $t \to x$ ؛ في الجهة اليمنى، $t \to x$ أولاً، ثم $n \to \infty$.

سوف نبين الآن بواسطة أمثلة متعددة أن معالجات الغاية لا يمكن بصورة عامة أن تكون متبادلة بدون أن يؤثر ذلك على النتيجة. بعد ذلك سوف نقوم ببرهنة أن ترتيب العمليات التي توصلنا إلي الغاية وفق ظروف محددة لا تعني شيئاً.

مثالنا الأول، والأسهل، يخص "المتتالية الثنائية" "double sequence"

٧، ٢ مثال: بالنسبة إلى $m = 1,2,3,..,$ $n = 1,2,3,\dots,$ لتكن

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n} \ .$$

عندها، لكل n ثابتة،

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1,$$

لذلك فإن

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1 \ . \qquad (٤)$$

من جهة أخرى، لكل m ثابتة،

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0,$$

لذلك فإن

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0. \qquad (٥)$$

٧، ٣ مثال: لتكن

$$f_n(x) = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} \quad (x \text{ حقيقية } ; n = 0,1,2,\dots)$$

ولاحظ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}. \qquad (٦)$$

بما أن $f_n(0)=0$، فإن لدينا $f(0)=0$. لـ $x\neq 0$، فإن المتسلسلة الأخيرة في (٦) هي متسلسلة هندسية متقاربة بمجموع $1+x^2$ (المبرهنة ٣، ٢٦). إذن

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x=0),\\ 1+x^2 & (x\neq 0),\end{cases} \qquad (٧)$$

لذلك فإن المتسلسلات المتقاربة للدوال المستمرة قد تمتلك مجموعاً غير مستمر.

٧، ٤ مثال بالنسبة $m=1,2,3,\ldots$، ضع

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}.$$

عندما يكون $m!x$ عدداً صحيحاً، فإن $f_m(x)=1$. بالنسبة لجميع القيم الأخرى لـ x فإن $f_m(x)=0$. الآن لتكن

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x) .$$

بالنسبة لـ x الغير نسبية، $f_m(x)=0$ لجميع m؛ إذن $f(x)=0$. بالنسبة لـ x النسبية، لنقل $x=p/q$، حيث p و q عددين صحيحين، نلاحظ أن $m!x$ يكون عدداً صحيحاً إذا كانت، $m\geq q$، لذلك فإن $f(x)=1$. إذن

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}=\begin{cases}0 & (\text{غير نسبية } x),\\ 1 & (\text{نسبية } x),\end{cases} \qquad (٨)$$

نكون بهذا قد حصلنا على دالة غاية غير مستمرة في كل مكان، والتي ليست متكامل ريماني (التمرين ٤، الفصل السادس).

٧، ٥ مثال لتكن

$$f_n(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{n}}, \quad (\text{حقيقية } x \quad n=1,2,3,\ldots) \qquad (٩)$$

و

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 .$$

عندها فإن $f'(x)=0$، و

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx ,$$

لذلك فإن $\{f'_n\}$ لا تتقارب إلى f'. على سبيل المثال،

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \to +\infty$$

عندما $n \to \infty$، بينما $f'(0) = 0$.

٧، ٦ مثال: لتكن

$$f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n \quad . \quad 0 \le x \le 1) \quad , \quad (n = 1,2,3,\ldots \qquad (١٠)$$

لكل $0 < x \le 1$، يكون $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$

بالنسبة إلى المبرهنة ٣، ٢٠ (د). بما إن $f_n(0) = 0$، نلاحظ إن

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1) \quad . \qquad (١١)$$

بحسابات بسيطة يتبين إن

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+2} \quad .$$

لذلك، وعلى الرغم من (١١)، فإن

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty$$

عندما $n \to \infty$.

إذا قمنا باستبدال n^2 بـــ n في(١٠)، فإن (١١) لا تزال تتحقق، ولكن عندها سيكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

بينما

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = 0 \; .$$

لذلك فإن غاية المتكامل لا تكون بالضرورة مساوية لتكامل الغاية، حتى في حالة كون كليهما منتهيتين.

بعد هذه الأمثلة، التي تبين الخطأ الذي قد يحصل إذا تم تبادل الخطوات المتعلقة بالغاية بصورة لا أبالي، نقوم بتعريف منوال جديد للتقارب، أقوى من التقارب النقطي المعرف في التعريف ٧، ١، سوف يمكننا من الوصول إلى نتائج إيجابية.

التقارب المنتظم Uniform Convergence

٧، ٧ تعريف: نقول إن متتالية الدوال $\{f_n\}$، $n = 1,2,3,...$ تتقارب ***بصورة منتظمة uniformly*** في E إلى الدالة f إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك عدداً صحيحاً N إن $n \geq N$ يؤدي إلى

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad (١٢)$$

لجميع $x \in E$.

من الواضح إن كل متتالية متقاربة بصورة منتظمة تكون متقاربة نقطياً. من الواضح جداً، إن الفرق بين هذين المفهومين هو أن: إذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً في E، عندها يوجد هنالك دالة f بحيث أن، لكل $\varepsilon > 0$، ولكل $x \in E$، يوجد هنالك عدداً صحيحاً N، الذي يعتمد على ε و x، بحيث أن (١٢) تتحقق إذا كانت $n \geq N$ ؛ إذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب بصورة منتظمة في E، فإنه بالإمكان، لكل $\varepsilon > 0$، إيجاد عدداً صحيحاً واحداً N يقوم بذلك لجميع $x \in E$.

نقول إن المتسلسلات $\sum f_n(x)$ تتقارب بصورة منتظمة في E إذا كانت متتالية المجموعات الجزئية $\{s_n\}$ المعرفة بـــ

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

تتقارب بصورة منتظمة في E.

تكون القاعدة لكوشي للتقارب المنتظم كالتالي.

٧، ٨ مبرهنة: *متتالية الدوال $\{f_n\}$، المعرفة في E، تتقارب بصورة منتظمة في E إذا وإذا فقط كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $x \in E, n \geq N, m \geq N$ تؤدي إلى إن*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \ . \qquad (١٣)$$

البرهان: لنفترض إن $\{f_n\}$ تتقارب بصورة منتظمة في E، ولتكن f دالة غاية. عندها يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $n \geq N$، $x \in E$ تؤدي إلى إن

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

لذلك فإن

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|\le\left|f_n(x)-f(x)\right|+\left|f(x)-f_m(x)\right|\le\varepsilon$$

إذا كانت $x\in E, n\ge N, m\ge N$.

بالعكس، افترض إن الشرط الكوشي يتحقق. استناداً إلى المبرهنة ٣، ١١. فإن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب، لكل x إلى الغاية التي نستطيع تسميتها بـ $f(x)$. لذلك فإن المتتالية $\{f_n\}$ تتقارب في E، إلى f. يجب علينا إن نبرهن إن التقارب يكون بصورة منتظمة.

لنأخذ $\varepsilon>0$، ونختار N بحيث أن (١٣) تتحقق. ثبت n، ودع $m\to\infty$ في (١٣). بما إن $f_m(x)\to f(x)$ عندما $m\to\infty$، فإن ذلك يعطي

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\varepsilon \qquad (١٤)$$

لكل $n\ge N$ ولكل $x\in E$، وبهذا يكتمل البرهان.

إن القاعدة الآتية تعتبر مفيدة في بعض الأحيان.

٧، ٩ مبرهنة *افترض إن*

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\,(x\in E).$$

ضع

$$M_n=\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|.$$

عندها فإن $f_n\to f$ بصورة منتظمة في E إذا وإذا فقط كانت $M_n\to 0$ عندما $n\to\infty$.

بما إن ذلك يعتبر نتيجة مباشرة للتعريف ٧، ٧، سنقوم بحذف تفاصيل برهان المبرهنة.

بالنسبة للمتسلسلات، هنالك اختبار ملائماً جداً للتقارب المنتظم، يرجع إلى ويرستراس Weierstrass.

٧، ١٠ مبرهنة: *افترض إن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المعرفة في E، وافترض إن*

$$\left|f_n(x)\right|\le M_n \qquad (x\in E, \quad n=1,2,3,\dots).$$

عندها فإن $\sum f_n$ تتقارب بصورة منتظمة في E إذا كانت $\sum M_n$ تتقارب.

لاحظ بأن العكس غير مؤكد (وهو، في الحقيقة، غير صحيح).

البرهان: إذا كانت $\sum M_n$ تتقارب، عندها، لكل $\varepsilon > 0$ العشوائي،

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \le \sum_{i=n}^{m} M_i \le \varepsilon \qquad (x \in E),$$

شريطة أن يكون m و n كبيران بما فيه الكفاية. التقارب المنتظم يأتي من المبرهنة ٧، ٨.

التقارب المنتظم والاستمرارية

Uniform Convergence And Continuity

٧، ١١ مبرهنة: *افترض إن $f_n \to f$ بصورة منتظمة في المجموعة E في الفضاء المتري. لتكن x نقطة غاية لـــ E، وافترض إن*

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n \quad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{١٥}$$

عندها فإن $\{A_n\}$ تتقارب، و

$$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n \ . \tag{١٦}$$

بكلمة أخرى فإن الاستنتاج هو إن

$$\lim_{t \to x}\lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty}\lim_{t \to x} f_n(t) \ . \tag{١٧}$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى التقارب المنتظم لـــ $\{f_n\}$ يوجد هنالك N بحيث أن $m \ge N, n \ge N$، $t \in E$ تؤدي إلى إن

$$\left|f_n(t) - f_m(t)\right| \le \varepsilon \ . \tag{١٨}$$

بترك $t \to x$ في (١٨)، فإننا نحصل على

$$\left|A_n - A_m\right| \le \varepsilon$$

بالنسبة إلى $m \ge N, n \ge N$، لذلك فإن $\{A_n\}$ متتالية كوشي ولذلك فإنها تتقارب، لنقل إلى A.

الخطوة التالية،

$$\left|f(t) - A\right| \le \left|f(t) - f_n(t)\right| + \left|f_n(t) - A_n\right| + \left|A_n - A\right|. \tag{١٩}$$

نختار أولاً n بحيث أن

$$\left|f(t)-f_n(t)\right|\le\frac{\varepsilon}{3} \qquad (٢٠)$$

لجميع $t\in E$ (أن ذلك ممكناً استناداً إلى التقارب المنتظم)، وبحيث أن

$$\left|A_n-A\right|\le\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (٢١)$$

عندها، لهذه الـ n، نختار الجوار V لـ x بحيث أن

$$\left|f_n(t)-A_n\right|\le\frac{\varepsilon}{3} \qquad (٢٢)$$

إذا كانت $t\in V\cap E$, $t\neq x$.

بتعويض المتباينات (٢٠) إلى (٢٢) في (١٩)، فإننا نلاحظ

$$\left|f(t)-A\right|\le\varepsilon,$$

شريطة أن تكون $t\in V\cap E$, $t\neq x$. إن هذا يعتبر مكافئاً إلى (١٦).

٧، ١٢ مبرهنة: *إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية لدوال مستمرة في E، وإذا كانت $f_n\to f$ بصورة منتظمة في E، عندها فإن f تكون مستمرة في E.*

إن هذه النتيجة المهمة جداً هي نتيجة مباشرة للمبرهنة ٧، ١١.

إن العكس ليس صحيحاً ؛ أي، إن متتالية الدوال المستمرة قد تتقارب إلى دالة مستمرة، ولو إن التقارب ليس منتظماً. إن المثال ٦، ٧ هو من هذا النوع (لملاحظة ذلك، قم بتطبيق المبرهنة ٧، ٩). ولكن يوجد هنالك حالة نستطيع فيها تأكيد العكس.

٧، ١٣ مبرهنة: *افترض إن K متراصة، و*

(أ) $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المستمرة في K،

(ب) $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً إلى الدالة المستمرة f في K،

(ج) $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$ لجميع $x\in K$, $n=1,2,3,\ldots$ عندها فإن $f_n\to f$ بصورة منتظمة في K.

البرهان: ضع $g_n=f_n-f$. عندها فإن g_n مستمرة، $g_n\to 0$ نقطيا، و $g_n\ge g_{n+1}$.

يجب علينا إن نبرهن إن $g_n\to 0$ بصورة منتظمة في K.

لنأخذ $\varepsilon>0$. لتكن K_n مجموعة جميع النقاط $x\in K$ يكون فيها $g_n(x)\ge\varepsilon$. بما

إن g_n مستمرة، فإن K_n مغلقة (المبرهنة ٤، ٨)، إذن تكون متراصة (المبرهنة ٢، ٣٥). بما إن $g_n \ge g_{n+1}$، لدينا $K_n \supset K_{n+1}$. عين $x \in K$. بما إن $g_n \to 0$، نلاحظ إن $x \notin K_n$ إذا كانت n كبيرة بما فيه الكفاية. لذلك فإن $x \notin \bigcap K_n$. بكلمة أخرى، $\bigcap K_n$ يكون فارغاً. إذن K_N تكون فارغة لبعض N (المبرهنة ٢، ٣٦). يؤدي ذلك إلى إن $0 \le g_n(x) < \varepsilon$ لبعض $x \in K$ ولجميع $n \ge N$. وهذا يبرهن المبرهنة.

لنلاحظ إن التراص هو في الواقع مهماً هنا. على سبيل المثال، إذا كانت

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \qquad (0 < x < 1; \qquad n = 1,2,3,\ldots)$$

عندها فإن $f_n(x) \to 0$ ترتيباً في $(0,1)$، ولكن التقارب ليس منتظماً.

٧، ١٤ تعريف: إذا كانت X فضاءاً مترياً، فإن $\mathcal{C}(X)$ سوف ترمز إلى مجموعة الدوال المركبة القيمة، المستمرة، المقيدة ضمن المنطلق X.

[لاحظ إن التقييد فائض عن الحاجة إذا كانت X متراصة (المبرهنة ٤، ١٥). لذلك فإن $\mathcal{C}(X)$ تتألف من جميع الدوال المركبة والمستمرة في X إذا كانت X متراصة].

نرفع مع كل $f \in \mathcal{C}(X)$ معيارها الأسمى (معيارها لنهايتها العظمى) ***supremum norm***

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad .$$

بما إن f مقيدة بالافتراض، فإن $\|f\| < \infty$. من الواضح إن $\|f\| = 0$ فقط إذا كانت $f(x) = 0$ لكل $x \in X$، أي إن فقط إذا كانت $f = 0$. إذا كانت $h = f + g$، فإن

$$|h(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|$$

لجميع $x \in X$؛ إذن

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\| \quad .$$

إذا قمنا بتعريف المسافة بين $f \in \mathcal{C}(X)$ و $g \in \mathcal{C}(X)$ بـ $\|f - g\|$، يؤدي ذلك إلى أن البديهيات ٢، ١٥ للمتري تكون متحققة.

نكون بهذا قد جعلنا $\mathcal{C}(X)$ في الفضاء المتري.

بالإمكان إعادة صياغة المبرهنة ٧، ٩ كالتالي:

المتتالية $\{f_n\}$ تتقارب إلى f فيما يتعلق بالقياس المتري لـ $\mathcal{C}(X)$ إ ذا وإذا فقط كانت $f_n \to f$ بصورة منتظمة في X.

استنادا لذلك، فإن المجموعات الجزئية المغلقة $\mathcal{C}(X)$ تسمى أحيانا ***مغلقة بانتظام*** *uniformlclosed*، وانغلاق المجموعة $\boldsymbol{A} \subset \mathcal{C}(X)$ يسمى انغلاقها المنتظم its *uniform closure*، وهكذا.

٧، ١٥ مبرهنة: *إن القياس المتري أعلاه يجعل من $\mathcal{C}(X)$ فضاءاً متريًا تامًا.*

البرهان: لتكن $\{f_n\}$ متتالية كوشي في $\mathcal{C}(X)$. إن هذا يعني إن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك N بحيث أن $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ إذا كانت $n \geq N$ و $m \geq N$. يتبع ذلك (استناداً إلى المبرهنة ٧، ٨) انه يوجد هنالك الدالة f بالمنطلق X والتي فيها تتقارب $\{f_n\}$ بصورة منتظمة. استناداً إلى المبرهنة ٧، ١٢، فإن f تكون مستمرة. إضافة لذلك، فإن f مقيدة، نظراً لأنه يوجد هنالك n بحيث أن $|f(x) - f_n(x)| < 1$ لجميع $x \in X$، و f_n تكون مقيدة.

إذن $f \in C(X)$، وبما إن $f_n \to f$ بصورة منتظمة في X، يكون لدينا $\|f - f_n\| \to 0$ عندما $n \to \infty$.

التقارب المنتظم والتكامل

Uniform Convergence And Integration

٧، ١٦ مبرهنة: *لتكن α متزايدة ترتيبيًا في $[a,b]$. أفترض أن $f_n \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$، بالنسبة إلى $n = 1,2,3,\ldots$، وأفترض أن $f_n \to f$ بصورة منتظمة في $[a,b]$. عندها فإن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$، و*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha \quad . \tag{٢٣}$$

(إن تواجد الغاية هو جزء من الاستنتاج).

البرهان: يكفي إن نبرهن ذلك بالنسبة للدوال الحقيقية f_n . ضع

$$\varepsilon_n = \sup |f_n(x) - f(x)|, \tag{٢٤}$$

يكون ألـــ sup مأخوذ فوق $a \le x \le b$. ثم

$$f_n - \varepsilon_n \le f \le f_n + \varepsilon_n$$

لذلك فإن المتكاملين العلوي والسفلي لـــ f (لاحظ التعريف ٦، ٢) يحققان

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \le \underline{\int} f d\alpha \le \overline{\int} f d\alpha \le \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) d\alpha \quad . \qquad (٢٥)$$

فإن

$$0 \le \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha \le 2\varepsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)] \quad .$$

بما إن $\varepsilon_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ (المبرهنة ٧، ٩)، فإن المتكاملين العلوي والسفلي لـــ f يكونان متساويين.

لذلك فإن $f \in \Re(\alpha)$. تطبيق أخر لـــ (٢٥) الآن ينتج

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \le \varepsilon_n [\alpha(b) - \alpha(a)] \quad . \qquad (٢٦)$$

وهذا يؤدي إلى (٢٣).

نتيجة: *إذا كانت* $f_n \in \Re(\alpha)$ *في* $[a,b]$ *وإذا كان*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (a \le x \le b),$$

المتسلسلة المتقاربة بانتظام في $[a,b]$، عندها فان

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

بكلمة أخرى، فإن المتسلسلة قد تتكامل حداً حداً.

التقارب المنتظم والتفاضل

Uniform Convergence And Differentiation

كنا قد لاحظنا في المثال ٧، ٥ إن التقارب المنتظم لـــ $\{f_n\}$ لا يدل على أي شئ بالنسبة للمتتالية $\{f_n'\}$. لذلك فإننا نحتاج إلى افتراضات أقوى لإثبات إن $f_n' \to f'$ إذا كانت $f_n \to f$.

٧، ١٧ مبرهنة: *افترض إن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للتفاضل في $[a,b]$ وبحيث أن $\{f_n(x_0)\}$ تتقارب إلى بعض ما مثل نقطة x_0 في $[a,b]$. إذا كانت $\{f_n'\}$ تتقارب بصورة منتظمة في $[a,b]$، عندها فإن $\{f_n\}$ تتقارب بصورة منتظمة في $[a,b]$ إلى الدالة f، و*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (a \le x \le b). \tag{٢٧}$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. نختار N بحيث أن $n \ge N$، $m \ge N$، تؤدي إلى أن

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{٢٨}$$

و

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (a \le t \le b) . \tag{٢٩}$$

إذا قمنا بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطية ٥، ١٩ على الدالة $f_n - f_m$، فإن (٢٩) تبين أن

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \le \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{٣٠}$$

لأي x و t في $[a,b]$، إذا كانت $n \ge N$، $m \ge N$. إن المتباينة

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

تؤدي، استناداً إلى (٢٨) و (٣٠)، إلى أنه

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad (a \le x \le b, n \ge N, m \ge N),$$

لذلك فإن $\{f_n\}$ تتقارب بصورة منتظمة في $[a,b]$. لتكن

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (a \le x \le b) .$$

لنقم الآن بتثبيت النقطة x في $[a,b]$ ونعرف

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \qquad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \tag{٣١}$$

بالنسبة إلى $a \le t \le b$، $t \ne x$. عندها فإن

$$\lim_{t\to x} \phi_n(t) = f_n'(x) \qquad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{٣٢}$$

تبين المتباينة الأولى في (٣٠) أن

$$\left|\phi_n(t)-\phi_m(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (n\ge N, m\ge N),$$

لذلك فإن $\{\phi_n\}$ تتقارب بصورة منتظمة، بالنسبة إلى $t \neq x$. بما أن $\{f_n\}$ تتقارب إلى f، فإننا نستنتج من (٣١) أن

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t) \tag{٣٣}$$

بصورة منتظمة بالنسبة إلى $t\neq x, a\le t\le b$.

إذا قمنا الآن بتطبيق المبرهنة ٧، ١١ على $\{\phi_n\}$، فإن (٣٢) و (٣٣) تبينان أن

$$\lim_{t\to x}\phi(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x);$$

وهذه هي (٢٧)، استناداً إلى تعريف $\phi(t)$.

ملاحظة: إذا تم افتراض استمرارية الدوال f_n' إضافة إلى الافتراضات أعلاه، عندها فإنه بالإمكان برهنة (٢٧) بشكل أقصر كثيراً وذلك بالاستناد إلى المبرهنة ٧، ١٦ والمبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل.

٧، ١٨ مبرهنة: *يوجد هنالك دالة حقيقية مستمرة في الخط الحقيقي ليست قابلة للتفاضل في أي مكان.*

البرهان: عرف

$$\varphi(x)=|x| \qquad (-1\le x\le 1) \tag{٣٤}$$

ووسع تعريف $\phi(x)$ لجميع x الحقيقية بوضع

$$\varphi(x+2)=\varphi(x) . \tag{٣٥}$$

عندها، لكل s و t،

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|\le|s-t|. \tag{٣٦}$$

على وجه الخصوص، تكون φ مستمرة في $\mathbf{R}^1$. عرف

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x). \tag{٣٧}$$

بما أن $0\le\varphi\le 1$، فإن المبرهنة ٧، ١٠ تبين أن المتسلسلة (٣٧) تتقارب بصورة منتظمة في $\mathbf{R}^1$. استناداً إلى المبرهنة ٧، ١٢ فإن f تكون مستمرة في $\mathbf{R}^1$.

الآن عين عدداً حقيقياً x وعدداً صحيحاً موجباً m. ضع

$$\delta_m = \pm \tfrac{1}{2} \cdot 4^{-m} \tag{٣٨}$$

حيث اختيرت الإشارة بحيث أنه لا يقع أي عدد صحيح بين $4^m x$ و $4^m(x+\delta_m)$. إن هذا ممكن القيام به، نظراً لأن $4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$. عرف

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}. \tag{٣٩}$$

عندما تكون $n > m$، فإن $4^n\delta_m$ تكون عدداً صحيحاً زوجياً، لذلك فإن $\gamma_n = 0$. عندما تكون $0 \le n \le m$، فإن (٣٦) تدل على أن $|\gamma_n| \le 4^n$.

بما أن $|\gamma_m| = 4^m$، فإننا نستنتج أن

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\ &\ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\ &= \tfrac{1}{2}(3^m + 1).\end{aligned}$$

عندما $m \to \infty$، $\delta_m \to 0$. يؤدي ذلك إلى أن f غير قابلة للتفاضل في x.

عوائل الدوال المتساوية الاستمرارية

Equicontinuos Families Of Functions

لاحظنا في المبرهنة ٣، ٦ بأن كل متتالية مقيدة من الأعداد العقدية تحتوي على لاحقة متقاربة، وأثير عندها السؤال حول ما إذا كان هنالك شيئا مشابهاً يصح على متتاليات الدوال. لجعل هذا السؤال اكثر دقة، سوف نقوم بتعريف نوعين من التقييد.

٧، ١٩ تعريف: لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المعرفة في المجموعة E.

نقول إن $\{f_n\}$ *مقيدة نقطيا pointwise bounded* في E إذا كانت المتتالية $\{f_n(x)\}$ *مقيدة* لكل $x \in E$، أي أن، إذا كان يوجد هنالك دالة القيم المنتهية ϕ المعرفة في E بحيث أن

$$|f_n(x)| < \phi(x) \qquad (n = 1,2,3,\ldots \quad , x \in E)$$

نقول إن $\{f_n\}$ *مقيدة بانتظام* ***uniformly bounded*** في E إذا كان يوجد هنالك عدداً M، بحيث أن

$$(n = 1,2,3,\ldots \qquad ,x \in E) \qquad |f_n(x)| < M$$

الآن إذا كان $\{f_n\}$ مقيدة نقطياً في E و E_1 مجموعة جزئية قابلة للعد في E، فانه من الممكن دائماً إن نجد لاحقة $\{f_{n_k}\}$ بحيث أن $\{f_{n_k}(x)\}$ تتقارب لكل $x \in E_1$. بالإمكان القيام بذلك وفق المعالجة القطرية التي استخدمت في برهان المبرهنة ٧، ٢٣.

على الرغم من ذلك، فانه حتى إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المستمرة المقيدة بانتظام في المجموعة المتراصة E، فقد لا يوجد هنالك لاحقة تتقارب نقطياً في E. في المثال القادم، ستكون برهنة ذلك معقدة جداً أخذ ا بنظر الاعتبار الوسائل التي نمتلكها لحد الآن، ولكن البرهان سيصبح سهلاً جداً إذا ما استعنا بمبرهنة من الفصل الحادي عشر.

٧، ٢٠ مثال: لتكن

$$(n = 1,2,3,\ldots \qquad ,0 \le x \le 2\pi) \qquad f_n(x) = \sin nx \ .$$

افترض انه يوجد هنالك متتالية $\{n_k\}$ بحيث أن $\{\sin n_k x\}$ تتقارب، لكل $x \in [0,2\pi]$. في هذه الحالة يجب أن يكون لدينا

$$(0 \le x \le 2\pi) \qquad \lim_{k\to\infty}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \ ;$$

إذن

$$(0 \le x \le \pi) \qquad \lim_{k\to\infty}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \ ; \qquad (٤٠)$$

استناداً إلى مبرهنة ليبك **Lebesgue`s theorem** بخصوص تكامل المتتاليات المتقاربة قيدياً (المبرهنة ١١، ٣٢)، فإن (٤٠) تؤدي إلى أن

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\,dx = 0 \ . \qquad (٤١)$$

ولكن بحسابات بسيطة يتبين إن

$$\int_0^{2\pi}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\,dx = 2\pi \ ,$$

والتي تناقض (٤١).

السؤال الآخر هو فيما إذا كانت كل متتالية متقاربة تحتوي على متتالية جزئية متقاربة

بانتظام. يبين مثالنا القادم بان هذا قد لا يكون كذلك، حتى إذا كانت المتتالية المقيدة بانتظام؛ في مجموعة متراصة. (يبين المثال ٦، ٧ بان متتالية الدوال المقيدة قد تتقارب بدون أن تكون مقيدة بانتظام، ولكنها تعتبر مسألة لا تستحق الذكر أن نلاحظ أن التقارب المنتظم لمتتالية الدوال المقيدة تؤدي إلى مقيدة منتظمة.

٧، ٢١ مثال: لتكن

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2} \qquad ,0 \le x \le 1 \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

عندها فإن $|f_n(x)| \le 1$، لذلك فإن $\{f_n\}$ مقيدة بانتظام في $[0,1]$. كذلك

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1) ،$$

لكن

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad (n = 1,2,3,\ldots) ،$$

لذلك لا تستطيع أية متتالية جزئية أن تتقارب بانتظام في $[0,1]$.

إن المفهوم الذي نحتاج إليه في هذا الخصوص هو مفهوم الاستمرارية المتساوية، والذي نقدمه بالتعريف الآتي

٧، ٢٢ تعريف: العائلة $\mathfrak{I}$ للدوال المركبة f المعرفة في المجموعة E في الفضاء المتري X يقال بأنها *مستمرة بالتساوي* ***equicontinuous*** في E إذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

كلما كان $d(x,y) < \delta$، $x \in E, y \in E$، و $f \in \mathfrak{I}$. ترمز الـ d هنا إلى المقياس المتري لـ X.

من الواضح أن كل فرد من أي عائلة مستمرة بالتساوي يكون مستمراً بانتظام.

إن المتتالية في المثال ٧، ٢١ هي ليست مستمرة بالتساوي.

سوف تبين المبرهنات ٧، ٢٤ و ٧، ٢٥ان هنالك علاقة بين التساوي المستمر من جهة والتقارب المنتظم لمتتاليات الدوال المستمرة، من جهة أخرى. ولكن سنقوم أولاً بوصف عملية اختيار ليست لها أية علاقة بالاستمرارية.

٧، ٢٣ مبرهنة: *إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية مقيدة نقطيــاً لدوال مركبة في المجموعة القابلة للعد E، عندها فإن $\{f_n\}$ تمتلك لاحقة $\{f_{nk}\}$ بحيث أن $\{f_{nk}(x)\}$ تتقارب لكل $x \in E$.*

البرهان: لتكن $\{x_i\}$، $i = 1,2,3,\ldots$، نقاط لــ E، مرتبة في متتالية. بما أن $\{f_n(x_1)\}$ مقيدة هنالك متتالية جزئية، والتي سنرمز لها بالرمز $\{f_{1,k}\}$، $\{f_{1,k}(x_1)\}$ مقيدة تتقارب عندما $k \to \infty$.

لنلاحظ الآن المتتاليات $S_1, S_2, S_3, \ldots,$ والتي سنقدمها وفق الترتيب

$$\begin{array}{lllll} S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} \quad \cdots \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} \quad \cdots \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} \quad \cdots \\ \multicolumn{5}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

والتي تمتلك الخصائص التالية:

(أ) S_n هي متتالية جزئية لــ S_{n-1}، بالنسبة إلى $n = 2,3,4,\ldots.$

(ب) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ تتقارب، عندما $k \to \infty$ (إن تقييد $\{f_n(x_n)\}$ تجعل بالإمكان أن نختار S_n بهذه الطريقة).

(ج) إن الترتيب الذي تظهر به الدوال هو نفس الترتيب في كل متتالية ؛ أي أنه، إذا سبقت إحدى الدوال دالة أخرى في S_1، فإنهم يكونون بنفس العلاقة بكل S_n، حتى تحذف واحدة أو أخرى من هذه الدوال. إذن، عندما نتحول من صف معين في الترتيب أعلاه إلى الصف الأسفل الذي يليه، فإن الدوال قد تتحرك إلى اليسار، ولكن ليس إلى اليمين مطلقاً.

الآن نسير عبر قطر الترتيب إلى الأسفل ؛ أي، نلاحظ المتتالية

$$S: \ f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \ \cdots .$$

استناداً إلى (ج)، فإن المتتالية S (باستثناء ربما حدودها الــ $n-1$ الأولى) تكون متتالية جزئية لــ S_n، بالنسبة إلى $n = 1,2,3,\ldots$ ، إذن (ب) تؤدي إلى أن $\{f_{n,n}(x_i)\}$ تتقارب عندما $n \to \infty$، لكل $x_i \in E$.

٧، ٢٤ مبرهنة: *إذا كانت K فضاءاً متريًا متراصاً، إذا كانت $f_n \in C(K)$ بالنسبة إلى*

$n = 1,2,3,\ldots$، وإذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام في K، عندها فإن $\{f_n\}$ تكون متساوية الاستمرارية في K.

البرهان: لنأخذ $0 < \varepsilon$. بما إن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام، يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن

$$\|f_n - f_N\| < \varepsilon \qquad (n > N) \qquad (42)$$

(لاحظ التعريف ٧، ١٤) بما إن الدوال المستمرة تكون مستمرة بانتظام في المجموعات المتراصة، يوجد هنالك $\delta > 0$ بحيث أن

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \qquad (43)$$

إذا كانت $1 \le i \le N$ و $d(x,y) < \delta$.

إذا كانت $n > N$ و $d(x,y) < \delta$، فإن ذلك يؤدي إلى

$$|f_n(x) - f_n(y)| \le |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon$$

بالاقتران مع (٤٣)، فإن ذلك يبرهن المبرهنة.

٧، ٢٥ مبرهنة: *إذا كانت K متراصة، وإذا كانت $f_n \in C(K)$ بالنسبة إلى $n = 1,2,3,\ldots$، وإذا كانت $\{f_n\}$ مقيدة نقطياً ومتساوية الاستمرارية في K، عندها فإن*

(أ) *تكون $\{f_n\}$ مقيدة بانتظام في K،*

(ب) *تحتوي $\{f_n\}$ على لاحقة جزئية متقاربة بانتظام.*

البرهان:

(أ) لنأخذ $0 < \varepsilon$ ونختار $0 < \delta$، وفقاً للتعريف ٧، ٢٢، بحيث أن

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \qquad (44)$$

لجميع n شريطة إن تكون $d(x,y) < \delta$.

بما إن K متراصة، يوجد هنالك عدد منتهي من النقاط $p_1,\ldots,p_r$ في K بحيث أنه لكل $x \in K$ يوجد على الأقل p_i واحدة بحيث $d(x,p_i) < \delta$. بما إن $\{f_n\}$ *مقيدة نقطياً*، يوجد هنالك $M_i < \infty$ بحيث أن $|f_n(p_i)| < M_i$ لجميع n إذا كانت $M = \max(M_1,\ldots,M_r)$، عندها فإن

$|f(x)| < M + \varepsilon$ لكل $x \in K$. وهذا يبرهن (أ).

(ب) لتكن E مجموعة جزئية مركزة (كثيفة) قابلة للعد في K. (بالنسبة لوجود مثل هذه المجموعة E، راجع التمرين ٢٥، الفصل الثاني). تبين المبرهنة ٧، ٢٣ بأن $\{f_n\}$ تمتلك لاحقة $\{f_{ni}\}$ بحيث أن $\{f_{ni}(x)\}$ تتقارب لكل $x \in E$.

ضع $f_{ni} = g_i$، لتبسيط الترميز. سوف نبرهن إن $\{g_i\}$ تتقارب بانتظام في K.

لتكن $\varepsilon > 0$، ونختار $\delta > 0$ كما في بداية هذا البرهان، لتكن $V(x,\delta)$ المجموعة التي تضم جميع $y \in K$ حيث $d(x,y) < \delta$. بما إن E كثيفة في K، و K متراصة، يوجد هنالك عدداً منتهياً من النقاط $x_1,\ldots,x_m$ في E بحيث أن

$$K \subset V(x_1,\delta) \cup \cdots \cup V(x_m,\delta) \quad (٤٥)$$

بما إن $\{g_i(x)\}$ تتقارب لكل $x \in E$، يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon \quad (٤٦)$$

كلما كانت $i \geq N$, $j \geq N$, $1 \leq s \leq m$.

إذا كانت $x \in K$، فإن (٤٥) تبين إن $x \in V(x_s,\delta)$ لبعض s، لذلك فإن

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon$$

لكل i. إذا كانت $i \geq N$ و $j \geq N$، نستنتج من (٤٦) إن

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

وهذا يكمل البرهان.

مبرهنة ستون– ويرستراس The Stone-Weirstrass Theorem

٧، ٢٦ مبرهنة: *إذا كانت f دالة مركبة مستمرة في $[a,b]$، يوجد هنالك متتالية من متعددات الحدود P_n بحيث أن*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

بصورة منتظمة في $[a,b]$. إذا كانت f حقيقية، فإنه بالإمكان اخذ P_n حقيقية.

هذه هي الصيغة التي اكتشفت بها المبرهنة أول مرة من قبل ويرستراس.

البرهان: قد نفترض، بدون أي خسارة في العمومية، بأن $[0,1]=[a,b]$. وقد نفترض أيضاً أن $f(0)=f(1)=0$. وذلك لأنه إذا تم برهنة المبرهنة هذه الحالة، لاحظ

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)] \qquad (0\leq x\leq 1) \ .$$

هنا $g(0)=g(1)=0$، وإذا كان بالمستطاع الحصول على g كغاية لمتتالية لمتعدد الحدود متقاربة بانتظام، من الواضح أنه نفس الشيء يصبح على f، بما أن $f - g$ هو متعدد الحدود.

إضافة لذلك، نعرف $f(x)$ لتكون صفراً بالنسبة لـــ x خارج $[0,1]$. عندها فإن f تكون مستمرة بانتظام على طول الخط.

نضع

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n, \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (٤٧)$$

حيث إن c_n اختيرت بحيث أن

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx=1 \ . \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (٤٨)$$

إننا نحتاج إلى بعض المعلومات بخصوص ترتيب حجم c_n. بما إن

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx &= 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx\\ &\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)dx\\ &=\frac{4}{3\sqrt{n}},\\ &>\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

نستنتج من (٤٨) إن

$$c_n<\sqrt{n} \qquad (٤٩)$$

إن المتباينة $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$ التي استخدمناها أعلاه بالإمكان إثبات صحتها بسهولة بملاحظة الدالة

$$(1-x^2)^n-1+nx^2$$

والتي تساوي صفر عند $x=0$ وتكون مشتقاتها موجبة في $(0,1)$ بالنسبة إلى أي $\delta>0$ ، فإن (٤٩) تؤدي إلى

$$Q_n(x) \le \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \;, \qquad (\delta \le |x| \le 1) \qquad (٥٠)$$

لذلك فإن $Q_n \to 0$ بانتظام في $\delta \le |x| \le 1$.

الآن ضع

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt \qquad (0 \le x \le 1) \qquad (٥١)$$

إن افتراضاتنا بخصوص f تبين، بعد تغيير بسيط في المتغير، بأن

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt \,,$$

ومن الواضح إن المتكامل الأخير هو متعدد الحدود في x. لذلك فإن $\{P_n\}$ هي متتالية من متعددات الحدود، والتي تكون حقيقية إذا كانت f حقيقية.

لنأخذ $\varepsilon > 0$، نقوم باختيار $\delta > 0$ بحيث أن $|y-x| < \delta$ تؤدي إلى إن

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

لتكن $M = \sup|f(x)|$. باستخدام (٤٨)، (٥٠) وكون $Q_n(x) \ge 0$، نلاحظ إنه بالنسبة إلى $0 \le x \le 1$،

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt\right| \\
&\le \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \\
&\le 2M\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \\
&\le 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

بالنسبة إلى جميع ألـــ n الكبيرة بما فيه الكفاية، والتي تبرهن المبرهنة.

من المفيد أن نرسم المخططات البيانية لـــ Q_n لبعض القيم لـــ n ؛ أيضا لاحظ بأننا احتجنا إلى الاستمرارية المنتظمة لـــ f لاستنتاج الاقتراب المنتظم لـــ $\{P_n\}$.

في برهان المبرهنة ٧، ٣٢سوف لا نحتاج إلى القوة الكاملة للمبرهنة ٧، ٢٦، ولكن فقط الحالة الخاصة، الآتية والتي سنكتبها على شكل نتيجة.

٧، ٢٧ نتيجة: *لكل فترة $[-a,a]$ يوجد هنالك متتالية من متعددات الحدود الحقيقية P_n بحيث أن $P_n(0)=0$ وبحيث أن*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|$$

بصورة منتظمة في $[-a,a]$.

البرهان: بواسطة المبرهنة ٧، ٢٦ لكل فترة $[-a,a]$ يوجد هنالك متتالية $\{P_n{}^*\}$ من متعددات الحدود الحقيقية التي تتقارب إلى $|x|$ بصورة منتظمة في $[-a,a]$. على وجه الخصوص، $P_n{}^*(0) \to 0$ عندما $n \to \infty$. تمتلك متعددات الحدود

$$P_n(x) = P_n{}^*(x) - P_n{}^*(0) \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

خصائص مرغوبة.

سنقوم الآن بعزل تلك الخصائص لمتعددات الحدود التي تجعل مبرهنة ويرستراس ممكنة.

٧، ٢٨ تعريف: يقال لعائلة الدوال المركبة A المعرفة في المجموعة E بأنها جبرية ***algebra*** إذا كانت (i) $f+g \in A$، (ii) $fg \in A$، $cf \in A$، لكل $f \in A$, $g \in A$ والثابت العقدي c، أي انه إذا كانت A مغلقة عند الجمع، الضرب، والضرب العددي. سوف يتوجب علينا أيضا أن نلاحظ جبر الدوال الحقيقية ؛ في هذه الحالة، فإن المطلوب من (iii) بالطبع أن تتحقق بالنسبة إلى جميع c الحقيقية.

إذا كانت A تمتلك خاصية كون $f \in A$ كلما كان $f_n \in A$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ و $f_n \to f$ بانتظام في E، عندها يقال بأن A مغلقة بانتظام ***uniformly closed***.

لتكن B مجموعة جميع الدوال التي هي غايات لمتتاليات متقاربة بانتظام لعناصر A . عندها يطلق على B *الانغلاق المنتظم* لــA ***(uniform clouser)*** (راجع التعريف ٧، ١٤).

على سبيل المثال فإن مجموعة جميع متعددات الحدود هي جبرية، ويمكن صياغة مبرهنة ويرستراس بالقول إن مجموعة الدوال المستمرة في $[a,b]$ هي الانغلاق المنتظم لمجموعة متعددات الحدود في $[a,b]$.

٧، ٢٩ مبرهنة: *لتكن B الانغلاق المنتظم للجبر A من الدوال المقيدة. عندها فإن B تكون جبراً مغلقاً بانتظام.*

البرهان: إذا كان $f \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$، يوجد هنالك متتاليتين متقاربتين بانتظام $\{f_n\},\{g_n\}$ بحيث أن $f_n \to f$, $g_n \to g$ و $f_n \in \mathcal{A}$, $g_n \in \mathcal{A}$. بما إننا نتعامل هنا مع دوال *مقيدة*، من السهولة أن نبين إن

$$f_n + g_n \to f + g, \quad f_n g_n \to fg, \quad cf_n \to cf،$$

حيث إن c أي ثابت، والتقارب منتظم في كل حالة.

إذن $f + g \in \mathcal{B}$, $fg \in \mathcal{B}$ و $cf \in \mathcal{B}$، لذلك فإن $\mathcal{B}$ هي جبراً.

استناداً إلى المبرهنة ٢، ٢٧، فإن $\mathcal{B}$ تكون مغلقة (بانتظام).

٧، ٣٠ تعريف: لتكن $\mathcal{A}$ عائلة دوال في المجموعة E. عندها يقال لـــ $\mathcal{A}$ إنها *نقاط متباعدة* ***separate points*** في E إذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة $x_1, x_2 \in E$ يوجد دالة متعلقة بـ $\mathcal{A}$ $f \in \mathcal{A}$ بحيث أن $f(x_1) \neq f(x_2)$.

إذا كان لكل $x \in E$ يوجد هنالك دالة متعلقة بها $g \in \mathcal{A}$ بحيث أن $g(x) \neq 0$، فإننا نقول إن $\mathcal{A}$ لا تختفي ***vanishes*** عند إي نقطة من نقاط E.

من الواضح إن الجبر لجميع متعددات الحدود بمتغير واحد تمتلك هذه الخواص في $\mathbf{R}^1$.

كمثال على الجبر الذي لا يباعد النقاط هو مجموعة جميع متعددات الحدود الزوجية، لنقل في $[-1,1]$، لأنه $f(-x) = f(x)$ لكل دالة زوجية f.

تقدم المبرهنة الآتية توضيحاً اكبر لهذا المفهوم.

٧، ٣١ مبرهنة: *افترض إن $\mathcal{A}$ هي جبراً للدوال في المجموعة E*، $\mathcal{A}$ تباعد النقاط في E، و $\mathcal{A}$ لا نفرض x_1 و x_2 نقطتان مختلفتان لـــ E تختفي عند أي من نقاط E، وإن c_1, c_2 ثابتان (حقيقيان إذا كانت $\mathcal{A}$ جبراً حقيقياً). عندها فإن $\mathcal{A}$ تحتوي على الدالة f بحيث أن

$$f(x_1) = c_1 \quad , \quad f(x_2) = c_2 \; .$$

البرهان: تبين الفرضيات بأن $\mathcal{A}$ تحتوي على الدوال h, g و k بحيث أن

$$g(x_1) \neq g(x_2) \quad , \quad h(x_1) \neq 0 \quad , \quad k(x_2) \neq 0 \; .$$

ضع

$$u = gk - g(x_1)k \quad , \quad v = gh - g(x_2)h \; .$$

لذلك فإن.

$$u \in A, v \in A, u(x_1) = v(x_2) = 0, u(x_2) \neq 0 \text{ و } v(x_1) \neq 0$$ لذلك

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

تمتلك الخواص المطلوبة.

نمتلك الآن جميع الأوليات اللازمة لتعميم ستون **Stone's generalization** لمبرهنة ويرستراس *weierstrass*.

٧، ٣٢ مبرهنة: *لتكن A الجبر للدوال مستمرة حقيقية في المجموعة المتراصة K. إذا كانت A تباعد النقاط في K وإذا كانت A لا تختفي عند أي نقطة من نقاط K، عندها فإن الانغلاق المنتظم B لـ A يتألف من جميع الدوال الحقيقية المستمرة في K.*

سوف نجزأ البرهان إلى أربعة خطوات.

الخطوة ١: إذا كانت $f \in B$، فإن $|f| \in B$.

البرهان: لتكن

$$a = \sup|f(x)| \qquad (x \in K) \qquad (٥٢)$$

و لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى النتيجة ٧، ٢٧ يوجد هنالك أعدادا حقيقية $c_1, \dots, c_n$ بحيث أن

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y|\right| < \varepsilon \qquad (-a \leq y \leq a) \qquad (٥٣)$$

بما إن B جبرياً، فإن الدالة

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$$

تكون عنصراً في B . استناداً إلى (٥٢) و (٥٣)، لدينا

$$\big|g(x) - |f(x)|\big| < \varepsilon \qquad (x \in K)$$

بما إن B مغلقة بانتظام، فإن هذا يبين إن $|f| \in B$.

الخطوة ٢: إذا كانت $f \in B$ و $g \in B$، فإن $\max(f, g) \in B$ و $\min(f, g) \in B$.

إننا نعني بـ $\max(f, g)$ تلك الدالة h المعرفة بـ

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq g(x) \quad \text{إذا كانت} \ , \\ g(x) & f(x)<g(x) \quad \text{إذا كانت} \ , \end{cases}$$

وتعرف $\min(f,g)$ بنفس الطريقة.

البرهان: تستنتج الخطوة ٢ من الخطوة ١ والمتطابقتين

$$\max(f,g)=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f,g)=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}.$$

بالتكرار، فإنه بالإمكان طبعاً توسع النتيجة لأي مجموعة بعدد منتهي من الدوال: إذا كانت $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{B}$، فإن $\max(f_1,\ldots,f_n)\in\mathcal{B}$، و

$$\min(f_1,\ldots,f_n)\in\mathcal{B}\ .$$

الخطوة ٣: *لنأخذ الدالة الحقيقية f، المستمرة في K، والنقطة $x\in K$، و $\varepsilon>0$، يوجد هنالك الدالة $g_x\in\mathcal{B}$ بحيث أن $g_x(x)=f(x)$ و*

$$g_x(t)>f(t)-\varepsilon \qquad (t\in K). \tag{٥٤}$$

البرهان: بما أن $A\subset\mathcal{B}$ و A تحقق افتراضات المبرهنة ٧، ٣١ فإن $\mathcal{B}$ تفعل ذلك أيضاً.

إذن، لكل $y\in K$، نستطيع إيجاد الدالة $h_y\in\mathcal{B}$ بحيث

$$h_y(x)=f(x), \qquad h_y(y)=f(y)\ . \tag{٥٥}$$

استناداً إلى استمرارية h_y يوجد هنالك مجموعة مفتوحة J_y، تحتوي على y، بحيث أن

$$.h_y(t)>f(t)-\varepsilon \qquad (t\in J_y) \tag{٥٦}$$

بما إن K متراصة، يوجد هنالك مجموعة منتهية من النقاط $y_1,\ldots,y_n$ بحيث أن

$$K\subset J_{y_1}\cup\cdots\cup J_{y_n}\ . \tag{٥٧}$$

ضع

$$g(x)=\max(h_{y_1},\ldots,h_{y_n})\ .$$

استناداً إلى الخطوة ٢، $g\in\beta$، والعلاقات (٥٥) إلى (٥٧) تبين إن g_x تمتلك الخصائص الأخرى المطلوبة.

الخطوة الرابعة: لنأخذ الدالة الحقيقية f، المستمرة في K، و $0 < \varepsilon$، يوجد هنالك الدالة $h \in B$ بحيث أن

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K) \qquad (٥٨)$$

بما إن $\mathcal{B}$ مغلقة بانتظام، فإن هذه العبارة مكافئة لاستنتاج المبرهنة.

البرهان: لنلاحظ الدوال g_x , لكل $x \in K$. المؤلفة في الخطوة ٣. استناداً إلى استمرارية g_x، يوجد هنالك مجموعات مفتوحة V_x تحتوي على x، بحيث أن

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in V_x) \qquad (٥٩)$$

بما إن K متراصة، يوجد هنالك مجموعة منتهية من النقاط $x_1, \ldots, x_m$ بحيث أن

$$K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m} \ . \qquad (٦٠)$$

ضع

$$h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m}) \ .$$

استناداً إلى الخطوة ٢، $h \in \mathcal{B}$، و (٥٤) تؤدي إلى

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K) \qquad (٦١)$$

بينما (٥٩) و(٦٠) تؤديان إلى إن

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \qquad (t \in K) \qquad (٦٢)$$

أخيرا، فإن (٥٨) تستنتج من (٦١) و(٦٢).

إن المبرهنة ٧، ٣٢ لا تتحقق بالنسبة للجبريات المركبة. يقدم التمرين ٢١ مثالاً على ذلك. على الرغم من ذلك، فإن استنتاج المبرهنة ينطبق على الجبريات المركبة، إذا تم فرض شرطاً إضافيا على $\mathcal{A}$ ، وهو بالتحديد، إن $\mathcal{A}$ *متجاورة ذاتياً* ***self-adjoint*** . إن هذا يعني أنه لكل $f \in \mathcal{A}$، فإن مرافقها المركب $\bar{f}$ يجب أن يعود أيضا إلى $\mathcal{A}$ ؛ تعرف $\bar{f}$ بـــ $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

٧، ٣٣ مبرهنة: *افترض إن $\mathcal{A}$ جبراً متجاورة ذاتياً من الدوال المركبة المستمرة في المجموعة المتراصة K، وإن $\mathcal{A}$ تباعد النقاط في K، ولا تختفي $\mathcal{A}$ عند إي نقطة من نقاط K.* عندها فان الانغلاق المنتظم $\mathcal{B}$ لـــ $\mathcal{A}$ يتألف من جميع الدوال المركبة المستمرة في K. بكلمة

أخرى فإن A تكون كثيفة $C(K)$.

البرهان: لتكن A_R مجموعة جميع الدوال الحقيقية في K التي تعود إلى A .

إذا كانت $f \in A$ و $f = u + iv$ ، حيث إن v, u حقيقيين، عندها فإن $2u = f + \overline{f}$، وبما إن A متجاورة ذاتياً، فإننا نلاحظ إن $u \in A_R$. إ ذا كانت $x_1 \neq x_2$، يوجد هنالك $f \in A$ بحيث أن $f(x_1) = 1$ ، $f(x_2) = 0$ ؛ إذن $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$، والتي تبين A_R النقاط المنفصلة في K. إذا كانت $x \in K$, فإن $g(x) \neq 0$ لـ بعض $g \in A$، ويوجد هنالك عدداً عقدياً λ بحيث $\lambda\, g(x) > 0$؛ إذا كانت $f = u + iv, f = \lambda\, g$ ، فإن ذلك يؤدي إلى إن $u(x) > 0$ ؛ إذن A_R لا تختفي عند آية نقطة من نقاط K.

لذلك فإن A_R تحقق فرضيات المبرهنة ٧، ٣٢. يؤدي ذلك إلى إن كل دالة حقيقية مستمرة في K تقع في الانغلاق المنتظم لـ A_R ، إذن تقع في B . إذا كانت f دالة مركبة مستمرة في K، $f = u + iv$ ، عندها $u \in B$, $v \in B$, إذن $f \in B$. وهذا يكمل البرهان.

تمارين EXERCISES

١- برهن على إن كل متتالية متقاربة بانتظام لدوال مقيدة تكون مقيدة بانتظام.

٢- إذا كانت $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ تتقاربان بانتظام في المجموعة E، برهن على إن $\{f_n + g_n\}$ تتقارب بانتظام في E، إضافة لذلك، إذا كانت $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ متتاليات لدوال مقيدة، برهن على إن $\{f_n g_n\}$ تتقارب بانتظام في E.

٣- قم بتشكيل المتتاليتين $\{f_n\},\{g_n\}$ اللتين تتقاربان بانتظام في مجموعة ما E، ولكن بحيث تكون $\{f_n g_n\}$ لا تتقارب بانتظام في E (بالطبع فإن $\{f_n g_n\}$ يجب أن تتقارب في E).

٤- لاحظ

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x} .$$

لأي من قيم x تتقارب المتتالية بشكل مطلق؟ وبأي فترات تتقارب بانتظام؟ وبأي فترات لا تتقارب بانتظام؟ هل تكون f مستمرة في أي مكان تتقارب فيه المتتالية؟ هل إن f مقيدة؟

٥- لتكن

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \left(x<\dfrac{1}{n+1}\right), \\ \sin^2\dfrac{\pi}{x} & \left(\dfrac{1}{n+1}\le x\le \dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{1}{n}<x\right). \end{cases}$$

بين إن $\{f_n\}$ تتقارب إلى دالة مستمرة، ولكن ليس بانتظام. استخدم المتسلسلة $\sum f_n$ لتبين إن التقارب المطلق، حتى بالنسبة لجميع x لا يدل على الاقتراب المنتظم.

٦- برهن على إن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$$

تتقارب بانتظام في كل فترة مقيدة، ولكنها لا تتقارب بشكل مطلق لأي قيمة من قيم x .

٧- بالنسبة إلى $n = 1,2,3,\ldots$، حقيقية، ضع

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

بين إن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام إلى الدالة f، وإن المعادلة

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

تكون صحيحة إذا كانت $x \neq 0$، لكن تكون غير صحيحة إذا كانت $x = 0$.

٨- إذا كانت

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ 1 & (x > 0), \end{cases}$$

إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من النقاط المختلفة لـ (a,b)، وإذا كانت $\sum |c_n|$ تتقارب، برهن على إن المتسلسلة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \qquad (a \le x \le b)$$

تتقارب بانتظام، وان f تكون مستمرة لكل $x \neq x_n$.

٩- لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المستمرة تتقارب بانتظام إلى الدالة f في المجموعة E. برهن على إن

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

لكل متتالية من النقاط $x_n \in E$ بحيث أن $x_n \to x$, $x \in E$. هل يصح معكوس هذا؟

١٠- لتكن (x) ترمز إلى الجزء الكسري للعدد الحقيقي x (راجع التمرين ١٦، الفصل الرابع، بخصوص هذا التعريف) لاحظ الدالة

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} \qquad (x \text{ حقيقية}).$$

أوجد جميع عدم الاستمرارية لـ f، وبين انهم يكونون مجموعة كثيفة قابلة للعد.

بين، انه على الرغم من ذلك، تكون f متكامل ريماني عند كل فترة مقيدة.

١١- افترض إن $\{f_n\},\{g_n\}$ معرفتان في E، و

(أ) $\sum f_n$ تمتلك مجموعات جزئية مقيدة بانتظام؛

(ب) $g_n \to 0$ بانتظام في E ؛

(ج) $g_1(x) \ge g_2(x) \ge g_3(x) \ge \cdots$ لكل $x \in E$.

برهن على إن $\sum f_n g_n$ تتقارب بانتظام في E: *تلميح* قارن بالمبرهنة ٣، ٤٢.

١٢– أفترض أن g و f_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ معرفتان في $(0,\infty)$، وقابلتان للتكامل الريماني في $[t,T]$ كلما كان $0 < t < T < \infty$، $f_n \to f, |f_n| \le g$ بانتظام عند كل مجموعة جزئية متراصة $(0,\infty)$، و

$$\int_0^\infty g(x)dx < \infty \ .$$

برهن على أن $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx$.

(راجع التمرينين ٧و٨ من الفصل السادس بالنسبة إلى التعاريف اللازمة).

إن هذا يعتبر شكلاً ضعيفاً نوعاً ما لمبرهنة لبيك للاقتراب (المبرهنة ١١، ٣٢). حتى ضمن مفهوم المتكامل الريماني، فإن الاقتراب المنتظم من الممكن استبداله بالاقتراب النقطي إذا تم الافتراض بأن $f \in \Re$. (راجع البحثين المعدين من قبل أف. كننكهام في مجلة الرياضيات، المجلد٤٠، ١٩٦٧، الصفحات ١٧٩–١٨٦، ومن قبل أج. كيستلمان في مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية المجلد ٧٧، ١٩٧٠، الصفحات ١٨٢ –١٨٧).

(F .Cunningham in *Math. Mag.*, vol. 40, 1967, pp. 179-186, and H. Kestelman in *Amer .Math .Monthly,* vol. 77, 1970, pp. 182-187.)

١٣– أفترض أن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المتزايدة ترتيبا في $\mathbf{R}^1$ بحيث أن $0 \le f_n(x) \le 1$ لجميع x و لجميع n.

(أ) برهن على أنه يوجد هنالك دالة f ومتتالية $\{n_k\}$ بحيث أن

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{nk}(x)$$

لكل $x \in \mathbf{R}^1$. (إن وجود مثل هذه اللاحقة للتقارب النقطي غالباً ما يطلق عليه *مبرهنة اختبار هيلي theorem selection Helly's*.).

(ب) إذا كانت، إضافة لذلك، f مستمرة، برهن على أن $f_{nk} \to f$ بانتظام في $\mathbf{R}^1$.

تلميح: (i) بعض المتتالية الجزئية $\{f_{ni}\}$ تتقارب عند جميع النقاط النسبية r، لنقل،

إلى $f(r)$. (ii) عرف $f(x)$، لأي $x \in \mathbf{R}^1$، لتكن $\sup f(r)$، الـ sup يؤخذ فوق جميع الـ $r \le x$. (iii) بين أن $f_{ni}(x) \to f(x)$ عند كل x تكون عندها f مستمرة. (هنا تستخدم الترتيبية بشدة). (iv) المتتالية الجزئية لـ $\{f_{ni}\}$ تتقارب عند كل نقطة عدم استمرارية لـ f نظراً لأنه يوجد هنالك العديد مثل هذه النقاط القابلة للعد. إن هذا يبرهن (أ)، لبرهنة (ب) حور برهان (iii) بصورة ملائمة.

١٤- لتكن f دالة حقيقية مستمرة في $\mathbf{R}^1$ وتمتلك الخصائص التالية:

$0 \le f(t) \le 1$, $f(t+2) = f(t)$ لكل t، و

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \le t \le \frac{1}{3}) \\ 1 & (\frac{2}{3} \le t \le 1). \end{cases}$$

ضع $\Phi(t) = (x(t), y(t))$، حيث

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1} t), \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n} t).$$

برهن أن Φ تكون مستمرة وإن Φ تطبق $I = [0,1]$ في وحدة التربيع $I^2 \subset \mathbf{R}^2$. في الواقع، يتبين أن Φ تطبق لمجموعة كانتور في I^2.

تلميح: لكل $(x_0, y_0) \in I^2$ تمتلك الشكل

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1} \ , \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}$$

حيث أن كل a_i هي 0 أو 1. إذا كانت

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i-1} (2a_i)$$

بين أن $f(3^k t_0) = a_k$، وعليه فإن $x(t_0) = x_0$، $y(t_0) = y_0$.

(إن هذا المثال البسيط المسمى"منحني إملاء الفراغات" **"space-filling curve"** يرجع إلى آي. جي. شونبيرغ،

(I . J . Schoenberg, *bull A. M. S*., vol. 44, 1938, pp . 519).

١٥- أفترض أن f دالة حقيقية $\mathbf{R}^1$، $f_n(t) = f(nt)$ بالنسبة إلى n = 1,2,3, ... و $\{f_n\}$ متساوية في $[0,1]$. ما هو الاستنتاج الذي تستطيع التوصل إليه بخصوص f ؟

١٦- أفترض أن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المتساوية الاستمرارية في المجموعة المتراصة K، وبرهن على أن $\{f_n\}$ تتقارب نقطيـــاً في K. برهن على أن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام في K.

١٧- عرف رموز التقارب المنتظم والاستمرارية المتساوية للتطبيق في أي فضاء متري. بين أن المبرهنتين ٧، ٩ و ٧، ١٢ تتحققان بالنسبة إلى التطبيق في أي فضاء متري، وبأن المبرهنتين ٧، ٨ و ٧، ١١ تتحققان بالنسبة للتطبيق في أي فضاء متري تام، وبأن المبرهنات ٧، ١٠ ، ٧، ١٦ ، ٧، ١٧ ، ٧، ٢٤ و ٧، ٢٥ تتحقق بالنسبة لدوال القيم المتجهة، أي بالنسبة، للتطبيق في $\mathbf{R}^k$.

١٨- لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال المقيدة بانتظام والتي هي قابلة للتكامل الريماني في $[a,b]$، وضع

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \qquad (a \le x \le b).$$

برهن على أنه يوجد هنالك لاحقة $\{F_{nk}\}$ تتقارب بانتظام في $[a,b]$.

١٩- لتكن K فضاء مترياً متراصاً، لتكن S مجموعة جزئية لــ $\mathcal{C}(K)$. برهن على أن S متراصة (فيما يتعلق بالقياس المتري المعرف في الجزء ٧، ١٤) إذا وإذا فقط كانت S مغلقة بانتظام، مقيدة نقطياً، ومتساوية الاستمرارية. (إذا كانت S ليست متساوية الاستمرارية فإن S تحتوي على متتالية لا تمتلك لاحقة متساوية الاستمرارية، إذن لا تمتلك أي لاحقة تتقارب بانتظام في K).

٢٠- إذا كانت f مستمرة في $[0,1]$ وإذا كانت

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots),$$

برهن على أن $f(x) = 0$ في $[0,1]$. *تلميح:* إن متكامل حاصل ضرب f بأي متعددة حدود يساوي صفر. استخدم مبرهنة ويرستراس لتبين أن $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$.

٢١- لتكن K وحدة الدائرة في المستوي المركب (أي مجموعة جميع الــ z بحيث أن $|z| = 1$)، ولتكن $\mathcal{A}$ الجبر لجميع الدوال التي على شكل

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \quad (\theta \text{ حقيقية}).$$

عندها فإن A تباعد النقاط في K ولا تختفي A عند أي نقطة من نقاط K، ولكن على الرغم من ذلك يوجد هنالك دوال مستمرة في K والتي لا تقع في الانغلاق المنتظم لـ A. *تلميح:* لكل $f \in A$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0,$$

وهذا يصح أيضاً بالنسبة لكل f في انغلاق A.

٢٢- أفترض أن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$، وبرهن على أنه يوجد هنالك متعددات الحدود P_n بحيث أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f - P_n|^2 d\alpha = 0 \ .$$

(قارن مع التمرين ١٢، الفصل السادس).

٢٣- ضع $P_0 = 0$، وعرف، بالنسبة إلى $n = 0, 1, 2, \ldots$،

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}.$$

برهن على أن

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x|,$$

بانتظام في $[-1,1]$.

(إن ذلك يجعل بالإمكان برهنة مبرهنة ستون – ويرستراس بدون برهنة المبرهنة ٧، ٢٦ أولاً).

تلميح: استخدم المتطابقة

$$|x| - P_{n+1}(x) = \left[|x| - P_n(x)\right]\left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right]$$

لبرهنة إن $0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$ إذا كانت $|x| \le 1$، وبأن

$$|x| - P_n(x) \le |x|\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1}$$

إذا كانت $|x| \le 1$.

٢٤- لتكن X فضاءاً مترياً، بالقياس المتري d. عين النقطة $a \in X$. عين لكل $p \in X$ الدالة

f_p المعرفة بـــ

$$f_p(x) = d(x,p) - d(x,a) \qquad (x \in X).$$

برهن على إن $|f_p(x)| \leq d(a,p)$ لجميع $x \in X$، وإنه وفقاً لذلك تكون $f_p \in \mathcal{C}(x)$.

برهن على إن

$$\|f_p - f_q\| = d(p,q)$$

بالنسبة إلى جميع $p,q \in X$.

إذا كانت $\Phi(p) = f_p$ فإن ذلك يؤدي إلى إن Φ تكون تقايساً ***isometry*** (تطبيقاً محافظاً على المسافة) لـــ X في $\mathcal{C}\ (X)$ $\Phi(X) \subset$.

لتكن Y انغلاق $\Phi(x)$ في $\mathcal{C}\ (X)$. بين إن Y تكون تامة.

استنتاج: تكون X تقايساً إلى مجموعة جزئية مركزة للفضاء المتري التام Y.

(يحتوي التمرين ٢٤، الفصل الثالث برهاناً مختلفاً لذلك).

٢٥- افترض إن ϕ دالة حقيقية مستمرة ومحددة في المقطع المعرف بـــ $-\infty < y < \infty, 0 \leq x \leq 1$.

برهن على إن مسألة القيمة الأولية

$$y(0) = c, y' = \phi(x,y)$$

تمتلك حلاً. (لاحظ بأن افتراضات مبرهنة التواجد هذه هي أقل تشدداً من تلك المعلقة بمبرهنة الوحدانية ؛ راجع التمرين ٢٧، الفصل الخامس).

تلميح: عين n بالنسبة إلى $i = 0,1,\dots,n$، ضع $x_i = i/n$. لتكن f_n دالة مستمرة في $[0,1]$ بحيث أن $f_n(0) = c$،

إذا كانت $x_i < t < x_{i+1}$ $\qquad f_n'(t) = \phi(x_i, f_n(x_i))$

وضع

$$\Delta_n(t) = f_n'(t) - \phi(t, f_n(t))$$

باستثناء عند النقاط x_i، حيث $\Delta_n(t) = 0$. عندها فإن

$$f_n(x) = c + \int_0^x [\phi(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)]dt$$

اختار $M < \infty$ بحيث أن $|\phi| \le M$. اثبت التوكيدات الآتية.

(أ) $|f_n'| \le M$ ، $\Delta_n \in \Re, |\Delta_n| \le 2M$ ، و $|f_n| \le |c| + M = M_1$ ، لنقل، في $[0,1]$، لجميع n.

(ب) $\{f_n\}$ تكون متساوية الاستمرار في $[0,1]$، نظرا لأن $|f_n'| \le M$.

(ج) بعض $\{f_{nk}\}$ تتقارب إلى بعض f ، بانتظام في $[0,1]$،

(د) بما إن ϕ مستمرة بانتظام في المستطيل $0 \le x \le 1$ ، $|y| \le M_1$،

$$\phi(t, f_{n_k}(t)) \to \phi(t, f_n(t))$$

بانتظام في $[0,1]$.

(هـ) $\Delta_n(t) \to 0$ بانتظام في $[0,1]$، نظراً لأن

$$\Delta_n(t) = \phi(x_i, f_n(x_i)) - \phi(t, f_n(t))$$

في (x_i, x_{i+1}).

(و) إذن

$$f(x) = c + \int_0^x \phi(t, f(t))dt \ .$$

هذه ألـ f هي الحل للمسألة التي أمامنا.

٢٦- برهن نظير مبرهنة التواجد المتعلقة بمسألة القيمة ـــالأولية

$y(0) = c, y' = \Phi(x, y)$ ،

حيث الآن $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^k, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ ، و Φ تطبيقاً مستمراً محدداً للجزء من $\mathbf{R}^{k+1}$ المعرف بـــ $0 \le x \le 1$ ، $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$ في $\mathbf{R}^k$. (قارن التمرين ٢٨، الفصل الخامس). تلميح: استخدم نسخة القيم المتجهة للمبرهنة ٧، ٢٥.

الفصل الثامن

بعض الدوال الخاصة

- متسلسلات القوى
- الدوال الآسية واللوغاريتمية
- الدوال المثلثية
- الكمال الجبري للحقل المركب
- متسلسلة فوريه
- دالة كاما Γ
- تمارين

الفصل الثامن
بعض الدوال الخاصة
Some Special Functions

متسلسلات القوى Series Power

في هذا البند سوف نقوم باشتقاق خصائص بعض الدوال التي تُقَدَم على شكل متسلسلات قوى، أي، الدوال التي تكون على شكل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \qquad (١)$$

أو، بأكثر عمومية

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n (x-a)^n. \qquad (٢)$$

تسمى هذه الدوال *"الدوال التحليلية"* ***"analytic functions"*** .

سوف نحدد أنفسنا بالتعامل مع القيم الحقيقية لـــ x. وفقاً لذلك فإننا سنجابه فترات التقارب بدلاً من دوائر التقارب (راجع المبرهنة ٣، ٣٩).

إذا كانت (١) تتقارب لجميع x في $(-R,R)$، لبعض $R>0$ (R قد تكون $+\infty$)، نقول أن f تكون منتشرة في متسلسلات القوى حول النقطة $x=0$. بنفس الطريقة، إذا كانت (٢) تتقارب لـــ $|x-a|<R$، فيقال أن f منتشرة في متسلسلات القوى حول النقطة $x=a$. وابتغاءً للسهولة، فإننا غالباً ما سنأخذ $a=0$ بدون أي خسارة في العمومية.

٨، ١ مبرهنة: *افترض أن المتسلسلة*

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \qquad (٣)$$

تتقارب لـــ $|x|<R$، *وعرف*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \qquad (|x|<R). \qquad (٤)$$

عندها فإن (٣) *تتقارب بانتظام في* $[-R+\varepsilon,R-\varepsilon]$، بغض النظر عن أي $\varepsilon>0$ يتم اختيارها. تكون الدالة f مستمرة و قابلة للتفاضل في $(-R,R)$، و

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad (|x| < R) \ . \tag{٥}$$

البرهان: لنأخذ $0 < \varepsilon$. بالنسبة إلى $|x| \le R - \varepsilon$، لدينا

$$|c_n x^n| \le |c_n (R-\varepsilon)^n|;$$

وبما أن

$$\sum c_n (R-\varepsilon)^n$$

تتقارب بشكل مطلق (كل متسلسلة قوى تتقارب بشكل مطلق داخل فترتها التقارب، استناداً إلى الاختبار الجذري)، تبين المبرهنة ٧، ١٠ التقارب المنتظم لـ (٣) في $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$.

بما أن $\sqrt[n]{n} \to 1$ عندما $n \to \infty$، فإن لدينا

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \ ,$$

لذلك فإن المتسلسلتين (٤) و(٥) تمتلكان نفس فترة التقارب.

بما أن (٥) هي متسلسلة قوى، فإنها تتقارب بانتظام في $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$، لكل $0 < \varepsilon$، ونستطيع تطبيق المبرهنة ١٧، ٧ (على المتسلسلات بدلاً من المتتاليات). يؤدي ذلك إلى إن (٥) تتحقق إذا كانت $|x| \le R - \varepsilon$.

ولكن، لنأخذ إي x بحيث أن $|x| < R$، نستطيع أن نجد $0 < \varepsilon$ بحيث أن $|x| < R - \varepsilon$. إن هذا يبين إن (٥) يتحقق بالنسبة إلى $|x| < R$.

إن استمرارية f تأتي من وجود f' (المبرهنة ٥، ٢).

نتيجة: *بموجب افتراضات المبرهنة* ٨، ١، f تمتلك مشتقات لجميع الرتب في $(-R, R)$، والتي تكون تبينت بـــ

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k} \ . \tag{٦}$$

على الوجه الخصوص،

$$f^{(k)}(0) = k! c_k \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \ . \tag{٧}$$

(هنا $f^{(0)}$ تعني f، و $f^{(k)}$ هي المشتقة الـــ kth لـــ f، بالنسبة إلى $k = 1,2,3,\ldots$).

البرهان: تستنتج المعادلة (٦) إذا قمنا بتطبيق المبرهنة ٨، ١ بصورة متعاقبة على $f, f', f'', \ldots$. بوضع $x = 0$ في (٦)، فإننا نحصل على (٧).

تعتبر الصيغة (٧) مهمة للغاية. من ناحية أخرى، أنها تبين تطور معاملات متسلسلة القوى لـ f تكون محددة بقيم f ومشتقاتها عند نقطة واحدة. من ناحية أخرى، إذا كانت المعاملات معلومة لدينا، فإن قيم مشتقات f عند مركز فترة التقارب من الممكن قراءتها مباشرة من متسلسلة القوى.

على الرغم من ذلك، لاحظ بأنه، ولو أن الدالة f قد تمتلك مشتقاتها لجميع الرتب، فإن المتسلسلة $\sum c_n x^n$، حيث أن c_n تحتسب وفق (٧)، لا تحتاج لأن تتقارب إلى $f(x)$ لأي $x \neq 0$. في هذه الحالة، فإن f لا تستطيع إن تنتشر في متسلسلة القوى حول $x = 0$. وذلك لأنة إذا كان لدينا $f(x) = \sum a_n x^n$، فإننا يجب أن يكون لدينا

$$n!a_n = f^{(n)}(0);$$

إذن $a_n = c_n$. كمثال على هذه الحالة راجع التمرين ١.

إذا كانت المتسلسلة (٣) تتقارب عند نقطة نهاية، لنقل عند $x = R$، عندما فإن f تكون مستمرة ليس فقط في $(-R,R)$، وإنما عند $x = R$ أيضا. إن هذا يتأتى من مبرهنة ابيل (لتبسيط الترميز، نأخذ $R = 1$):

٨، ٢مبرهنة: *افترض أن* $\sum c_n$ *تتقارب. ضع*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

عندها فإن

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{٨}$$

البرهان: لتكن $s_n = c_0 + \cdots + c_n$, $s_{-1} = 0$. عندها فإن

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

بالنسبة إلى $|x| < 1$، ندع $m \to \infty$ ونحصل على

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{٩}$$

أفترض $s = \lim_{n \to 0} s_n$. لنأخذ $\varepsilon > 0$. نختار N بحيث أن $n > N$ تؤدي

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

عندها، بما أن

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \qquad (|x|<1),$$

فإننا نحصل من (٩) على

$$|f(x)-s| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s)x^n\right| \le (1-x)\sum_{n=0}^{N}|s_n - s||x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

إذا كانت $x > 1-\delta$، لبعض $\delta > 0$ المختار بصورة مناسبة. إن هذا يؤدي إلى (٨).

كتطبيق على ذلك، لنبرهن المبرهنة ٣، ٥١، التي تفيد بأنه : *إذا كانت* $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$، *تتقارب إلى* A, B, C *وإذا كانت* $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$، فإن $C = AB$. ندع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

بالنسبة إلى $0 \le x \le 1$. بالنسبة إلى $x < 1$. تتقارب هذه المتسلسلات بشكل مطلق ولذلك من الممكن ضربها استناداً إلى التعريف ٣، ٤٨، عندما ننجز عملية الضرب، فإننا نلاحظ إن

$$f(x)\cdot g(x) = h(x) \qquad (0 \le x < 1) \tag{١٠}$$

استنادا إلى المبرهنة ٨، ٢،

$$f(x) \to A, \qquad g(x) \to B, \qquad h(x) \to C \tag{١١}$$

عندما $x \to 1$. تؤدي المعادلتين (١٠) و(١١) إلى أن $AB = C$.

الآن نحتاج إلى مبرهنة تتعلق بمعكوس بدرجة الجمع (راجع التمرينين ٢ و٣).

٨، ٣مبرهنة: *لنأخذ المتالية الثنائية* $\{a_{i_j}\}$، $i = 1,2,3,\ldots$, $j = 1,2,3,\ldots$ *لنفترض إن*

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_{i_j}| = b_i \qquad (i = 1,2,3,\ldots) \tag{١٢}$$

و $\sum b_i$ *تتقارب. عندها فإن*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i_j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i_j} \tag{١٣}$$

البرهان: نستطيع أن نبرهن (١٣) بأسلوب مباشر مشابه إلى (ولو أنه أكثر شمولاً من) الأسلوب الذي استخدمناه في المبرهنة٣، ٥٥. على الرغم من ذلك، فإن الطريقة الآتية تبدو أكثر متعة.

لتكن E مجموعة قابلة للعد تتألف من النقاط $x_0, x_1, x_2, \ldots$، وافترض إن $x_n \to x_0$ عندما $n \to \infty$. عرف

$$f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i_j} \qquad (i = 1,2,3,\ldots), \tag{١٤}$$

$$f_i(x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} \qquad (i,n = 1,2,3,\ldots), \tag{١٥}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E). \tag{١٦}$$

الآن، تبين (١٤)و(١٥)، سوية مع (١٢)، بأن f_i تكون مستمرة عند x_0. بما أن $|f_i(x)| \le b_i$ بالنسبة إلى $x \in E$، فإن (١٦) تتقارب بانتظام، لذلك فإن g تكون مستمرة عند x_0 (المبرهنة ٧، ١١). يؤدي ذلك إلى أن

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{i_j} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i_j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i_j}. \end{aligned}$$

٨، ٤ مبرهنة: *افترض أن*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{،}$$

المتسلسلة متقاربة في $|x| < R$. إذا كانت $-R < a < R$، فإن f تستطيع أن تنتشر في متسلسلة القوى حول النقطة $x = a$ التي تتقارب في $|x-a| < R - |a|$، و

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x-a| < R - |a|). \tag{١٧}$$

إن هذه المبرهنة هو توسيع للمبرهنة ٥، ١٥ وهو يُعرف أيضاً بمبرهنة تيلور ***Taylor's theorem***.

البرهان: لدينا

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[(x-a)+a]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} (x-a)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x-a)^m .$$

هذا هو التوسيع المطلوب حول النقطة $x = a$، لبرهنة صحة ذلك، علينا أن نبرز التغير الذي طرأ على ترتيب الجمع. تبين المبرهنة ٨، ٣ إن ذلك ممكناً إذا كانت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m} (x-a)^m \right| \tag{١٨}$$

تتقارب. ولكن (١٨) هي نفس

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|x-a| + |a|)^n , \tag{١٩}$$

و(١٩) تتقارب إذا كانت $|x-a| + |a| < R$.

أخيراً، فإن شكل المعاملات في (١٧) تتألف من (٧).

يتوجب علينا ملاحظة أن (١٧) قد تتقارب بالفعل عند فترة أكبر من الفترة $|x-a| < R - |a|$.

إذا تقاربت متسلسلتي القوى إلى نفس الدالة في $(-R, R)$، فإن (٧) تبين أن هاتين المتسلسلتين يجب أن تكونا متطابقتان، أي أنهما، يجب أن يمتلكان نفس المعاملات. من الجدير بالذكر أن نفس هذا الاستنتاج من الممكن استنتاجه من فرضيات أضعف بكثير :

٨، ٥ مبرهنة: *افترض إن المتسلسلتين* $\sum a_n x^n$ *و* $\sum b_n x^n$ *تتقاربان في القطعة* $S = (-R, R)$. *لتكن* E *مجموعة جميع* $x \in S$ *التي يكون فيها*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum b_n x^n . \tag{٢٠}$$

إذا كانت E *تمتلك نقطة غاية في* S*، عندها فإن* $a_n = b_n$ *بالنسبة إلى* $n = 0,1,2,\ldots$ *إذن تتحقق (٢٠) بالنسبة إلى جميع* $x \in S$

البرهان: ضع $c_n = a_n - b_n$ و

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (x \in S) \tag{٢١}$$

عندها فإن $f(x)=0$ في E.

لتكن A مجموعة جميع نقاط الغاية لـ E في S، ولتكن B تتألف من جميع النقاط الأخرى لـ S. من الواضح من تعريف " نقطة الغاية " إن B تكون مفتوحة. أفترض إننا نستطيع برهان أن A مفتوحة. عندها فإن Aو Bتكونان مجموعتين مفتوحتين منفصلتين. إذن يكونان متباعدتين (التعريف ٢، ٤٥). بما أن $A\cup B$، و S مترابطة، فإن واحدة من A و B يجب أن تكون فارغة. استناداً إلى الفرضيات، فإن A ليست فارغة. إذن تكون B فارغة، و $A=S$. بما أن f مستمرة في S، فإن $A\subset E$. لذلك فإن $S=E$، وتبين (٧) بأن $c_n=0$ بالنسبة $n=0,1,2,\ldots$ وهذا هو الاستنتاج المطلوب.

لذلك فإن علينا إن نبرهن إن A تكون مفتوحة. إذا كانت $x_0\in A$ فإن المبرهنة ٨، ٤ تبين أن

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n \qquad (|x-x_0|<R-|x_0|) \ . \tag{٢٢}$$

إننا ندعي إن $d_n=0$ لجميع n، خلافاً لذلك لتكن k اصغر عدد صحيح غير سالب بحيث أن $d_k\neq 0$. عندها فإن

$$f(x)=(x-x_0)^k g(x) \qquad (|x-x_0|<R-|x_0|)\ , \tag{٢٣}$$

حيث

$$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}d_{k+m}(x-x_0)^m \ . \tag{٢٤}$$

بما أن g مستمرة عند x_0 و $g(x_0)=d_k\neq 0$،

يوجد هنالك $\delta>0$ بحيث إن $g(x)\neq 0$ إذا كانت $|x-x_0|<\delta$. نستنتج من (٢٣) إن $f(x)\neq 0$ إذا كانت $0<|x-x_0|<\delta$. ولكن هذا تناقض كون x_0 نقطة غاية لـ E.

إذن $d_n=0$ لجميع n، لذلك فإن $f(x)=0$ لجميع x التي تتحقق عندها (٢٢)، أي في جوار لـ x_0. إن هذا يبين إن A تكون مفتوحة، وهذا ينهي البرهان.

الدوال الأُسية واللوغاريتمية

The Exponential And Logarithmic Functions

تعريف

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (٢٥)$$

يبين الاختبار النسبي إن هذه المتسلسلة تتقارب لكل z عقدي. بتطبيق المبرهنة ٣، ٥٠ بخصوص ضرب المتسلسلات المتقاربة بشكل مطلق فإننا نحصل على

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$(z+w)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

التي تعطينا الصيغة المهمة للجمع

$$E(z+w) = E(z)E(w) \quad (\text{عقديان } z, w). \qquad (٢٦)$$

أحد النتائج هو إن

$$E(z)E(-z) = E(z-z) = E(0) = 1 \quad (\text{عقديان } z) \qquad (٢٧)$$

إن هذا يبين إن $E(z) \neq 0$ لجميع z. استناداً إلى (٢٥)، $E(x) > 0$ إذا كانت $x > 0$ ؛لذلك (٢٧) تبين أن $E(x) > 0$ لجميع x. استناداً إلى (٢٥)، $E(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ ؛لذلك (٢٧) تبين أن $E(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$ على طول المحاور الحقيقية. استناداً إلى (٢٥) فإن $0 < x < y$ تؤدي إلى إن $E(x) < E(y)$ استناداً إلى (٢٧) نستنتج إن، $E(-y) < E(-x)$ ؛لذلك E تتزايد بشكل صارم على كل المحاور الحقيقية.

إن صيغة الجمع تبين أيضا إن

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z) \; ; \qquad (٢٨)$$

إن المساواة الأخيرة تستنتج بصورة مباشرة من (٢٥).

إن تكرار (٢٦) يعطينا

$$E(z_1 + \cdots + z_n) = E(z_1) + \cdots + E(z_n) \; . \qquad (٢٩)$$

لنأخذ $z_1 = \cdots = z_n = 1$ بما أن $E(1) = e$، حيث أن e هي العدد المعرف في التعريف ٣، ٣٠، فإننا نحصل على

$$E(n) = e^n \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \qquad (٣٠)$$

إذا كانت $p = n/m$، حيث أن m و n عددان حقيقيان، فإن

$$[E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n \qquad (٣١)$$

لذلك فإن

$$E(p) = e^p \qquad (p > 0 \quad \text{نسبية} \quad p) . \qquad (٣٢)$$

نستنتج من (٢٧) إن $E(-p) = e^{-p}$ إذا كانت p موجبة ونسبية. لذلك فإن (٣٢) تتحقق لجميع P النسبية.

في التمرين ٦، الفصل الأول، افترضنا التعريف الأتي

$$x^y = \sup e^p , \qquad (٣٣)$$

حيث أن sup مأخوذ فوق جميع p النسبية بحيث أن $p < y$، لأي y حقيقية، و $x > 1$. لذلك إذا بتعريف، لأي x حقيقية،

$$e^x = \sup e^p \qquad (p < x \quad \text{نسبية،} \quad p) , \qquad (٣٤)$$

إن خاصيتي الاستمرارية والترتيب لـــ E، سوية مع (٣٢)، تبين أن

$$E(x) = e^x \qquad (٣٥)$$

بالنسبة إلى جميع x الحقيقية. تفسر المعادلة (٣٥) السبب وراء تسمية E بالدالة الآسية.

غالباً ما يستخدم الرمز $\exp(x)$ بدلا من e^x، على الخصوص عندما تكون x مقداراً جبرياً معقداً.

في الحقيقة فإنه بالإمكان جداً استخدام (٣٥) بدلاً من (٣٤) كتعريف لـــ e^x ؛ إن (٣٥) تعتبر نقطة بداية مريحة جداً للبدء ببحث خواص e^x. سوف نلاحظ الآن انه بالإمكان استبدال (٣٣) أيضا بتعريف أخر اكثر ملائمة [راجع (٤٣)].

نتحول الآن إلى الرمز المألوف، e^x بدلاً من $E(x)$، ونلخص ما قمنا ببرهنته لحد الآن.

٨، ٦مبرهنة: *لتكن e^x معرفة في R^1 بـــ (٣٥) و(٢٥). فإن*

(أ) *تكون e^x مستمرة وقابلة للتفاضل لجميع x؛*

(ب) $(e^x)' = e^x$ ؛

(ج) *تكون e^x دالة متزايدة بشكل صارم لـــ x، و $e^x > 0$* ؛

(د) $e^{x+y} = e^x e^y$؛

(هـ) $e^x \to +\infty$ *عندما* $x \to +\infty$، $e^x \to 0$ *عندما* $x \to -\infty$ ؛

(و) $\lim_{n\to\infty} x^n e^{-x} = 0$، لجميع n.

البرهان: قمنا لحد الآن ببرهنة (أ) إلى (هـ) ،تبين (٢٥) إن

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بالنسبة إلى $x > 0$ ، لذلك فإن

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x},$$

وبذلك تستنتج (و). إن (و) تبين أن e^x تميل إلى $+\infty$" أسرع " من أية قوى لـــ x عندما $x \to +\infty$.

بما أن E متزايدة بشكل تام وقابلة للتفاضل في $\mathbf{R}^1$، فإنها تمتلك دالة عكسية L تكون أيضا متزايدة بشكل تام وقابلة للتفاضل ويكون منطلقها $E(\mathbf{R}^1)$، إي المجموعة التي تضم جميع الأعداد الموجبة. إن L معرفة بـــ

$$E(L(y)) = y \qquad (y > 0), \tag{٣٦}$$

أو، بصورة مكافئة، بـــ

$$L(E(x)) = x \qquad (\text{حقيقية } x) . \tag{٣٧}$$

بتفاضل (٣٧)، فإننا نحصل على (قارن المبرهنة ٥، ٥)

$$L'(E(x)) \cdot E(x) = 1 .$$

بكتابة $y = E(x)$ ، فإن ذلك يعطينا

$$L'(y) = \frac{1}{y} \qquad (y > 0) . \tag{٣٨}$$

بأخذ $x = 0$ في (٣٧)، فإننا نلاحظ إن $L(1) = 0$. إذن فإن (٣٨) تؤدي إلى إن

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x} . \tag{٣٩}$$

غالباً، ما تأخذ (٣٩) كنقطة بداية لمبرهنة اللوغاريتم والدالة الأسية. بوضع $u = E(x)$, $v = E(y)$، فإن (٣٦) تعطينا

$$L(uv) = L(E(x).E(y)) = L(E(x+y)) = x + y ,$$

لذلك فإن

$$L(uv) = L(u) + L(v) \qquad (u > 0, v > 0) . \tag{٤٠}$$

يبين هذا إن L تمتلك الخاصية المألوفة التي تجعل من اللوغاريتمات أدوات مفيدة في الاحتساب.

إن الرمز المألوف لـ $L(x)$ هو بالطبع $\log x$.

أما بالنسبة إلى سلوك x عندما $x \to +\infty$ و $x \to 0$، فإن المبرهنة ٨، ٦ (هـ) تبين أن

$$\log x \to +\infty, \text{ عندما } x \to +\infty$$

$$\log x \to -\infty \text{ عندما } x \to 0 \; .$$

من السهولة إن نلاحظ إن

$$x^n = E(nL(x)) \tag{٤١}$$

إذا كانت $x > 0$ و n عدداً صحيحاً. بنفس الطريقة، إذا كانت m عدداً صحيحاً موجباً فإن لدينا

$$x^{1/m} = E(\frac{1}{m} L(x)) \;, \tag{٤٢}$$

بما أن كل حد من حدود (٤٢)، عند رفعه إلى القوة الـ mth ينتج الحد المقابل لـ (٣٧). يضم (٤١) و(٤٢) فإننا نحصل على

$$x^\alpha = E(\alpha\, L(x)) = e^{\alpha \log x} \tag{٤٣}$$

لأي α نسبية.

نقوم الآن بتعريف x^α، لأي α حقيقية ولأي $x > 0$، بـ (٤٣). إن استمرارية وترتيبي E و L تبين أن هذا التعريف يؤدي إلى نفس النتيجة التي اقترحت سابقاً. إن الحقائق المذكورة في التمرين ٦من الفصل الأول، تعتبر نتائج عديمة القيمة لـ (٤٣).

إذا فاضلنا (٤٣)، فإننا نحصل، استناداً إلى المبرهنة ٥، ٥ ، على

$$.(x^\alpha)' = E(\alpha\;\; L(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1} \tag{٤٤}$$

لاحظ بأننا استخدمنا (٤٤) في السابق فقط بالنسبة إلى قيم متكاملات α، الحالة التي تستنتج فيها (٤٤) بسهولة من المبرهنة ٥، ٣ (ب). إن برهنة (٤٤) بصورة مباشرة من تعريف المشتقة، إذا كانت x^α معرفة بـ (٣٣) و αتكون غير نسبية يعتبر أمراً معقداً بالفعل.

إن صيغة التكامل المعروفة لـ x^α تستنتج من (٤٤) إذا كانت $\alpha \neq -1$ ومن (٣٨) إذا كانت $\alpha = -1$. نود هنا إن نقدم خاصية أخرى لـ $\log x$، وهي بالتحديد

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0 \tag{٤٥}$$

لكل $\alpha > 0$. أي إن، $\log x \to +\infty$ "أبطأ " من أي قوة موجبة لـــ x، عندما $x \to +\infty$
وذلك لأنه إذا كانت $0 < \varepsilon < \alpha$ و، $X > 1$، فإن

$$x^{-\alpha}\log x = x^{-\alpha}\int_1^x t^{-1}dt < x^{-\alpha}\int_1^x t^{\varepsilon-1}dt$$

$$= x^{-\alpha}\cdot\frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon}$$

وتستنتج بذلك (٤٥). كان بإمكاننا أيضا إن نستخدم المبرهنة ٨، ٦ (و) لاستنتاج (٤٥).

الدوال المثلثية The Trigonometric Functions

لنعرف

$$(٤٦)\quad C(x) = \frac{1}{2}[E(ix)+E(-ix)], \qquad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix)-E(-ix)].$$

سوف نبين أن $C(x)$ و $S(x)$ تطابقان الدالتين $\cos x$ و $\sin x$، اللتين عادة ما يكون تعريفهما منصباً على اعتبارات هندسية. استناداً إلى (٢٥) ، $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$. إذن فإن (٤٦) تبين أن $C(x)$

و $S(x)$ يكونان حقيقيين بالنسبة إلى x الحقيقية. وكذلك

$$(٤٧)\qquad E(ix) = C(x) + iS(x).$$

لذلك فإن $C(x)$ و $S(x)$ هما الجزئين الحقيقي والخيالي، على التوالي، لـــ $E(ix)$، إذا كانت x حقيقية. استناداً إلى (٢٧)،

$$\left|E(ix)^2\right| = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1,$$

لذلك فإن

$$(٤٨)\qquad |E(ix)| = 1 \qquad (x \text{ حقيقية}).$$

نستطيع إن نتوصل من (٤٦) إلى إن $C(0) = 1, S(0) = 0$، وتبين (٢٨) بأن

$$(٤٩)\qquad S'(x) = C(x) \quad , \quad C'(x) = -S(x)$$

نؤكد هنا إنه يوجد هنالك أعداداً صحيحة x بحيث أن $C(x) = 0$. وذلك لأنه لو افترضنا خلاف ذلك. بما أن $C(0) = 1$ فإن ذلك يؤدي إلى إن $C(x) > 0$ لجميع $x > 0$، إذن $S'(x) > 0$، استنادا إلى (٤٩)، إذن S تكون متزايدة بشكل تام؛وبما أن $S(0) = 0$، فإن $S(x) > 0$ إذا كانت $x > 0$. إذن إذا كانت $0 < x < y$، لدينا

$$S(x)(y-x) < \int_x^y S(t)dt = C(x)-C(y) \le 2 \quad . \qquad (٥٠)$$

تستنتج المتباينة الأخيرة من (٤٨) و(٤٧). بما أن $S(x)>0$، فإن (٥٠) لا يمكن إن تكون صحيحة بالنسبة إلى y الكبيرة، وبذلك يكون لدينا تناقض.

لتكن x_0 أصغر عدد موجب بحيث أن $C(x_0)=0$. إن هذا موجود، لأن مجموعة الأصفار للدالة المستمرة تكون مغلقة، و $C(0)\neq 0$. نقوم بتعريف العدد π بـــ

$$\pi = 2x_0 . \qquad (٥١)$$

عندها فإن $C(\pi/2)=0$، وتبين (٤٨) بأن $S(\pi/2)=\pm 1$. بما أن $C(x)>0$ في $(0,\pi/2)$، فإن S متزايدة في $(0,\pi/2)$؛ إذن $S(\pi/2)=1$. لذلك فإن

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right)=i ,$$

وتقدم صيغة الجمع بأن

$$E(2\pi i)=1 \quad , \quad E(\pi i)=-1; \qquad (٥٢)$$

إذن

$$E(z+2\pi i)=E(z) \ (\text{عقدي } z) \ . \qquad (٥٣)$$

٨، ٧ مبرهنة

(أ) تكون الدالة E دالة دورية ***periodic***، *بدورة $2\pi i$.*

(ب) تكون الدالتين C و S دالتين دوريتين، بدورة 2π.

(ج) إذا كانت $0<t<2\pi$، فإن $E(it)\neq 1$.

(د) إذا كانت z عدداً عقدياً بـــ $|z|=1$، فيوجد هنالك t وحدانية في $[0,2\pi)$ بحيث أن $E(it)=z$.

البرهان: استناداً إلى (٥٣)، فإن (أ) تتحقق ؛ و (ب) تستنتج من (أ) و (٤٦).

نفترض أن $0<t<\pi/2$ و $E(it)=x+iy$ بـــ x , y حقيقتين. يبين عملنا السابق أن $0<x<1 \ , \ 0<y<1$. لاحظ بأن

$$E(4it)=(x+iy)^4 = x^4-6x^2y^2+y^4+4ixy(x^2-y^2).$$

إذا كانت $E(4it)$، حقيقية فإن ذلك يؤدي إلى أن $x^2-y^2=0$ ؛ نظراً لأن $x^2+y^2=1$، استناداً إلى (٤٨)، لدينا $x^2=y^2=\frac{1}{2}$، إذن $E(4it)=-1$. وهذا يبرهن (ج).

إذا كانت $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$، فإن

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2 - it_1) \neq 1,$$

استناداً إلى (ج). إن هذا يثبت تأكيد الوحدانية في (د).

لبرهنة تأكيد الوجود في (د)، ثبت z بحيث أن $|z| = 1$. أكتب $z = x + iy$، بـ x وy حقيقيين. أفترض أولا أن $x \ge 0$ و $y \ge 0$. في $[0, \pi/2]$، C تتناقص من1 إلى 0. إذن $C(t) = x$ لبعض $t \in [0, \pi/2]$. بما أن $C^2 + S^2 = 1$ و $S \ge 0$ في $[0, \pi/2]$، فإن ذلك يؤدي إلى أن $z = E(it)$.

إذا كانت $x < 0$ و $y \ge 0$ فإن الشروط السابقة تتحقق بـ $-iz$. إذن $-iz = E(it)$ لبعض $t \in [0, \pi/2]$، وبما أن $i = E(\pi i/2)$، فإننا نحصل على $z = E(i(t + \pi/2))$.
أخيراً، إذا كانت $y < 0$، فإن الحالتين السابقتين تبينان بأن $-z = E(it)$ لبعض $t \in (0, \pi)$.
إذن $z = -E(it) = E(i(t + \pi))$.

وهذا يبرهن (د)، و إذن المبرهنة.

نستنتج من (د) و (٤٨) أن المنحني γ المعرف بـ

$$\gamma(t) = E(it) \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{٥٤}$$

يكون منحنياً بسيط مغلقاً والذي مداه وحدة الدائرة في المستوي. بما أن $\gamma'(t) = iE(it)$، فإن طول γ هو

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 2\pi,$$

استناداً إلى المبرهنة ٦، ٢٧. بالطبع هذه النتيجة متوقعة لمحيط الدائرة التي نصف قطرها 1. أنها تبين أن π، المعرف بـ (٥١)، تمتلك القيمة الهندسية المعروفة عندها.

بنفس الطريقة نلاحظ أن النقطة $\gamma(t)$ تصف القوس الدائري بطول t_0 عندها تزداد t من 0 إلى t_0. إن ملاحظة المثلث الذي رؤوسه

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \gamma(t_0), \quad z_3 = C(t_0)$$

يتبين أن $C(t)$ و $S(t)$ هما في الحقيقة متطابقتين مع $\cos t$ و $\sin t$، إذا ما تم تعريف الأخيرتين وفق الطريقة الاعتيادية كنسب لأضلاع المثلث القائم.

يتوجب علينا أن نذكر هنا بأننا قمنا باشتقاق الخواص الأساسية للدوال المثلثية من (٤٦) و(٢٥)، بدون الرجوع إلى المفهوم الهندسي للزاوية. يوجد هنالك أساليب هندسية أخرى

للتوصل إلى هذه الدوال. يتناول البحثين التاليين هذا الموضوع، الأول من تأليف دبل يو. اف. ابيرلين (مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية، المجلد ٧٤،١٩٦٧، الصفحات ١٢٢٣–١٢٢٥)

W . F . Eberlein (*Math . Mag* ., vol . 74, 1967, pp . 1223-1225)

والثاني تأليف جي. بي. روبسون (مجلة الرياضيات، المجلد ٤١، ١٩٦٨، الصفحات ٦٦–٧٠)

G . B . Robison (*Math .Mag* ., vol . 41, 1968, pp . 66-70) .

الكمال الجبري للحقل المركب

The Algebraic Completeness Of The Complex Field

نستطيع الآن أن نقدم برهاناً بسيطاً بخصوص التكامل الجبري للحقل المركب، أي أن نقول أن، كل متعدد الحدود الغير ثابتة والتي تحوي على معاملات عقدية يمتلك جذراً عقدياً.

٨، ٨ مبرهنة: *افترض أن* $a_0,\dots,a_n$ *أعداد عقدية،* $a_n \neq 0$ ، $n \geq 1$،

$$P(z) = \sum_0^n a_k z^k .$$

عندها فإن $P(z) = 0$ *لبعض الأعداد العقدية* z.

البرهان: بدون أية خسارة في العمومية، نفترض أن $a_n = 1$. ضع

$$\mu = \inf|P(z)| \qquad (\text{عقدي } z) \tag{٥٥}$$

إذا كانت $|z| = R$، فإن

$$|P(z)| \geq R^n[1-|a_{n-1}|R^{-1} - \cdots - |a_0|R^{-n}]. \tag{٥٦}$$

يميل الجانب الأيمن من (٥٦) إلى ∞ عندما $R \to \infty$. إذن يوجد هنالك R_0. بحيث أن $|P(z)| > \mu$ إذا كانت $|z| > R_0$. بما أن $|P|$ تكون مستمرة في القرص المغلق الذي يقع مركزه في 0 ونصف قطره R_0، فإن المبرهنة ٤، ١٦ تبين أن $|P(z_0)| = \mu$ لبعض z_0.

إننا ندعي أن $\mu = 0$.

إذا لم تكن كذلك، ضع $Q(z) = P(z+z_0)/P(z_0)$. عندها فإن Q هي متعددة الحدود غير ثابتة، $Q(0) = 1$، و $|Q(z)| \geq 1$ لجميع z. يوجد هنالك أصغر عدد صحيح k، $1 \leq k \leq n$ بحيث أن

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n \quad , \quad b_k \neq 0. \tag{٥٧}$$

استناداً إلى المبرهنة ٨، ٧ (د) يوجد هنالك θ حقيقية بحيث أن

$$e^{ik\theta}b_k = -|b_k|. \qquad (٥٨)$$

إذا كانت $r > 0$ و $r^k|b_k| < 1$، فإن (٥٨) تؤدي إلى أن

$$|1+b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k|b_k|,$$

لذلك فإن

$$|Q(re^{i\theta})| \le 1 - r^k\{|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|\}.$$

بالنسبة إلى r الصغيرة بما فيه الكفاية، فإن المقدار بين القوسين موجباً ؛ حيث $|Q(re^{i\theta})| < 1$، وهذا تناقض.

لذلك فإن $\mu = 0$، أي أن، $P(z_0) = 0$.

يحتوي التمرين ٢٧ على نتيجة أكثر عمومية.

متسلسلة فورير Fourier Series

٨، ٩ تعريف: تكون مجموعة الحدود المثلثية مجموعاً منتهياً على شكل

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \text{ حقيقية}), \qquad (٥٩)$$

حيث أن $a_0,\ldots,a_N$، $b_1,\ldots,b_N$ أعدادا عقدية. وأخذاً بنظر الاعتبار المتطابقتين (٤٦)، (٥٩) فإن بالإمكان كتابتها بالشكل

$$f(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} \quad (x \text{ حقيقية}), \qquad (٦٠)$$

والتي هي أكثر ملائمة للعديد من الأغراض. من الواضح إن كل متعدد الحدود المثلثي يكون دورياً، بدورة 2π.

إذا كانت n عدداً صحيحاً غير صفرياً، فإن e^{inx} هي مشتقة e^{inx}/in، والتي تمتلك أيضا الدورة 2π. إذن

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1 & (\text{if } n = 0), \\ 0 & (\text{if } n = \pm1, \pm2, \ldots). \end{cases} \qquad (٦١)$$

لنضرب (٦٠) بـــ e^{-imx}، حيث m عدداً صحيحاً؛ إذا كاملنا حاصل الضرب فإن، (٦١)

تبين أن

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx \qquad (٦٢)$$

بالنسبة إلى $|m| \le N$. إذا كانت $|m| > N$ فإن المتكامل في (٦٢) يكون 0.

بالإمكان استقراء الملاحظة الآتية من (٦٠) و(٦٢). إن متعدد الحدود المثلثي f، المقدم في (٦٠)، يكون حقيقياً إذا وإذا فقط كانت $c_{-n} = \overline{c_n}$ بالنسبة إلى $n = 0, \ldots, N$.

توافقاً مع (٦٠)، فإننا نعرف *المتسلسلة المثلثية* ***trigonometric series*** بأنها المتسلسلة التي تكون على شكل

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (\text{حقيقية } x); \qquad (٦٣)$$

يعرف المجموع الجزئي النوني لـ (٦٣) بأنه الجانب الأيمن من (٦٠). إذا كانت f دالة قابلة للتكامل في $[-\pi, \pi]$، فإن الأعداد c_m المعرفة في (٦٢) لجميع الأعداد الصحيحة m تسمى *معاملات فورير* ***Fourier Coefficients*** لـ f، وتسمى المتسلسلة (٦٣) المؤلفة من هذه المعاملات بمتسلسلة فوريرلـ ***Fourire Series of f***.

إن السؤال الطبيعي الذي يثار الآن هو فيما إذا كانت f محددة بمتسلسلة فورير العائدة لها أو بعبارة أخرى إذا كنا نعرف معاملات فورير للدالة، هل نستطيع إيجاد الدالة. وإذا كان ذلك ممكناً، كيف ؟.

إن دراسة مثل هذه المتسلسلات، وعلى وجه الخصوص، مسألة تمثيل دالة معينة بمتسلسلة مثلثية، ابتدأت في المسائل الفيزياوية مثل نظرية التذبذب ونظرية التوصيل الحراري ***(Fourier's "Théorie analytiwue de la chaleur")***، التي نشرت في عام ١٨٢٢).

إن المشاكل المتعددة والدقيقة التي ظهرت خلال هذه الدراسة قد أدت إلى تنقيح شامل وإعادة صياغة كامل نظرية الدوال ذات المتغير الحقيقي. ومن بين الأسماء العديدة البارزة، أسماء مثل ريمان، كانتور، ولبيك تمتلك علاقة وثيقة في هذا المجال، والتي يمكن القول إنها بجميع عمومياتها وتشعباتها، تحتل مركزاً رئيسياً بكامل موضوع التحليل.

سنكتفي باشتقاق بعض المبرهنات الأساسية التي نستطيع استيعابها بسهولة. استناداً إلى الطرق التي توصلنا أليها في الفصول السابقة. وبتفكير أكثر شمولاً فإن متكامل ليبك هو الأداة الطبيعية والتي لا يمكن الاستغناء عنها في هذا المجال.

سوف نقوم الآن بدراسة منظومات أكثر عمومية للدوال تتمتع بخاصية مشابهة لـ (٦١).

٨، ١٠ تعريف: لتكن $\{\phi_n\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ متتالية من الدوال المركبة في $[a,b]$، بحيث أن

$$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx = 0 \qquad (n \neq m) \tag{٦٤}$$

عندما يقال لـ $\{\varphi_n\}$ بأنها منظومة متعامدة للدوال في $[a,b]$ ***orthogonal system of functions on*** إضافة لذلك، إذا كانت،

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx = 1 \tag{٦٥}$$

لجميع n، فيقال لـ $\{\varphi_n\}$ بأنها ***تعامد طبيعي orthonormal***. على سبيل المثال، فإن الدوال $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}$ تشكل منظومة تعامد طبيعي في $[-\pi,\pi]$. ونفس الشئ على الدوال الحقيقية

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots .$$

إذا كانت $\{\phi_n\}$ تعامد طبيعي في $[a,b]$ وإذا كانت

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\varphi_n(t)}dt \qquad (n = 1,2,3,\dots), \tag{٦٦}$$

فإننا نسمي c_n معامل فورير النوني لـ f نسبة إلى $\{\phi_n\}$. إننا نكتب

$$f(x) \sim \sum_1^\infty c_n \phi_n(x) \tag{٦٧}$$

ونسمي هذه المتسلسلة متسلسلة فورير لـ f (نسبة إلى $\{\varphi_n\}$).

لاحظ بأن الرمز ~ المستخدم في (٦٧) لا يعني إي شيء بخصوص تقارب المتسلسلة ؛وهو لا يشير إلى أكثر من إن المعاملات مقدمة في (٦٦).

تبين المبرهنات الآتية بأن المجموعات الجزئية لمتسلسلات فورير لـ f تمتلك خاصية معينة بخصوص القيمة الدنيا. سوف نفترض هنا وفيما تبقى من هذا الفصل بأن $f \in \Re$، على الرغم من انه بالإمكان إضعاف هذا الافتراض.

٨، ١١ مبرهنة: *لتكن $\{\phi_n\}$ تعامد طبيعي في $[a,b]$. لتكن*

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} c_m \phi_m(x) \tag{٦٨}$$

المجموع الجزئي النوني لمتسلسلة فورير لـ f، وافترض إن

$$t_n(x)=\sum_{m=1}^{n}\gamma_m\phi_m(x) \quad . \tag{٦٩}$$

عندها فإن

$$\int_a^b |f-s_n|^2\,dx \le \int_a^b |f-t_n|^2\,dx \ , \tag{٧٠}$$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط كانت

$$\gamma_m=c_m \qquad (m=1,\ldots,n) \ . \tag{٧١}$$

إن هذا يعني، إنه من بين جميع الدوال تعطي s_n, t_n أفضل تقريب ممكن للمتوسط التربيعي لـ f.

البرهان: لتكن $\int$ ترمز إلى المتكامل عبر $[a,b]$، $\sum$ ترمز إلى المجموع من 1 إلى n. عندها فإن

$$\int f\bar{t}_n=\int\sum\bar{\gamma}_m\bar{\phi}_m=\sum c_m\bar{\gamma}_m$$

استناداً إلى التعريف $\{c_m\}$،

$$\int|t_n|^2=\int t_n\bar{t}_n=\int\sum\gamma_m\phi_m\sum\overline{\gamma_k\phi_k}=\sum|\gamma_m|^2$$

بما أن $\{\phi_m\}$ تعامد طبيعي، وكذلك

$$\begin{aligned}\int|f-t_n|^2&=\int|f|^2-\int f\bar{t}_n-\int\bar{f}t_n+\int|t_n|^2\\&=\int|f|^2-\sum c_m\bar{\gamma}_m-\sum\bar{c}_m\gamma_m+\sum\gamma_m\bar{\gamma}_m\\&=\int|f|^2-\sum|c_m|^2+\sum|\gamma_m-c_m|^2\end{aligned}$$

والتي من الواضح إنها تكون في قيمتها الدنيا إذا وإذا فقط كانت $\gamma_m=c_m$.

بوضع $\gamma_m=c_m$ في هذا الاحتساب، فإننا نحصل على

$$\int_a^b|s_n(x)|^2\,dx=\sum_1^n|c_m|^2\le\int_a^b|f(x)|^2\,dx \ , \tag{٧٢}$$

نظراً لأن $\int|f-t_n|^2\ge 0$.

٨، ١٢ مبرهنة: *إذا كانت $\{\phi_n\}$ تعامد طبيعي في $[a,b]$ وإذا كانت*

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x) \ ,$$

فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad . \qquad (٧٣)$$

وعلى وجهة الخصوص،

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \qquad (٧٤)$$

البرهان: يترك $n\to\infty$ في (٧٢)، فإننا نحصل عل (٧٣)، والتي تسمى *متباينة بيسل* *"Bessel inequlity"*.

٨، ١٣ المتسلسلات المثلثية Trigonometric series

من الآن فصاعداً سنتناول موضوع نظام المثلثات فقط. سوف ندرس الدوال f التي تمتلك الدورة 2π والتي هي قابلة للتكامل الريماني في $[-\pi,\pi]$ (وهكذا في كل فترة مقيدة). إذن ستكون متسلسلة فورير لـ f المتسلسلة (٦٣) التي تكون معاملاتها c_n المتكاملات (٦٢)، و

$$s_N(x) = s_N(f;x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} . \qquad (٧٥)$$

هو المجموع الجزئي النوني لمتسلسلة فورير لـ f. الآن نأخذ المتباينة (٧٢) بالشكل آلاتي

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_N|^2 dx = \sum_{-N}^{N}|c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx \qquad (٧٦)$$

بغية الحصول على عبارة جبرية لـ s_N اسهل للتناول من (٧٥) نقدم هنا ما يسمى *نواة دير جليت* *Dirichlet kernel*

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)} \qquad (٧٧)$$

المساواة الأولى أعلاه هي تعريف $D_N(x)$. وتستنتج المساواة الثانية إذا تم ضرب طرفي المتطابقة

$$(e^{ix}-1)D_N(x) = e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}$$

بـ $e^{-ix/2}$.

استناداً إلى (٦٢) و(٧٥)، لدينا

$$s_N(f;x) = \sum_{-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\, e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)}dt \quad ,$$

لذلك فإن

$$s_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt \, . \quad (٧٨)$$

إن كون جميع الدوال المعنية دورية تبين عدم أهمية الفترة التي نقوم بعملية التكامل، فوقها طالما إن طوله هو 2π. إن هذا يبين إن المتكاملين الاثنين في (٧٨) يكونان متساويين.

سوف نقوم ببرهنة مبرهنة واحدة فقط حول التقارب النقطي لمتسلسلة فورير.

٨، ١٤ مبرهنة: *إذا كان، لبعض x يوجد هنالك ثابتين $\delta > 0$ و $M < \infty$ بحيث أن*

$$|f(x+t) - f(x)| \le M|t| \quad (٧٩)$$

لجميع $t \in (-s,s)$، فإن

$$\lim s_N(f;x) = f(x) \quad (٨٠)$$

البرهان: عرف

$$g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \quad (٨١)$$

بالنسبة إلى $0 < |t| \le \pi$، ونضع $g(0) = 0$. استناداً إلى التعريف (٧٧)، فإن

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$$

إذن تبين (٧٨) بأن

$$\begin{aligned} s_N(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(N+\frac{1}{2})tdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\cos\frac{t}{2}\right]\sin Ntdt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\sin\frac{t}{2}\right]\cos Ntdt \end{aligned}$$

استناداً إلى (٧٩) و(٨١)، فإن $g(t)\cos(t/2)$ و $g(t)\sin(t/2)$ تكونان مقيدتان. لذلك فـإن المتكاملين الاثنين الأخيرين يميلان إلى الصفر عندما $N \to \infty$ استناداً إلى (٧٤). يبرهن هذا (٨٠).

نتيجة: *إذا كانت $f(x) = 0$ لجميع x في بعض القطع J، فإن $\lim s_N(f;x) = 0$ لكل $x \in J$.*

نقدم هنا صياغة جديدة لهذه النتيجة:

$s_N(f;x) - s_N(g;x) = s_N(f-g;x) \to 0$ عندما $N \to \infty$.

غالباً ما يطلق على هذا ***بمبرهنة التمركز*** ***localization theorem***. إنها تبين أن سلوك المتتالية $\{s_N(f;x)\}$، فيما يتعلق بالتقارب، يعتمد فقط على قيم f في بعض المناطق المجاورة (الصغيرة عشوائياً) بـــ x. لذلك فانه قد تمتلك متسلسلتين من متسلسلات فورير نفس السلوك في الفترة الواحدة ولكنهما قد يتصرفان تصرفات مختلفة جداً في بعض الفترات الأخرى. إننا نمتلك هنا تبايناً واضحاً جداً بين. متسلسلات فورير ومتسلسلات القوى (المبرهنة ٨، ٥).

نختتم هنا بمبرهنتين تقريبيتين أخريين.

٨، ١٥ مبرهنة: *إذا كانت f مستمرة (بدورة 2π) وإذا كانت $\varepsilon > 0$، فإنه يوجد هنالك متعددة حدود مثلثية P بحيث أن*

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

لجميع x الحقيقية.

البرهان: إذا قمنا بتعيين x و $x + 2\pi$، فإننا قد نعتبر الدوال ذات الدورة 2π في $\mathbf{R}^1$ كدوال في وحدة الدائرة T، بواسطة التطبيق $x \to e^{ix}$. إن متعددات الحدود المثلثية، إي، الدوال التي هي على شكل (٦٠)، تشكل جبراً متجاور -ذاتياً A ، الذي يباعد النقاط في T، والذي لا يختفي عند أي نقطة من نقاط T. بما أن T متراصاً، فإن المبرهنة ٧، ٣٣ تفيد بأن A يكون كثيفاً في $C(T)$. وهذا هو بالضبط ما تؤكده المبرهنة.

يبين التمرين ١٥ شكلاً أكثر دقه لهذه المبرهنة.

٨، ١٦ مبرهنة بارسيفال ***Parseval's theorem*** أفترض إن f و g دالتان قابلتان للتكامل الريماني بدورة 2π، و

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}. \tag{٨٢}$$

فإن

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(f;x)|^2 dx = 0, \tag{٨٣}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \overline{\gamma_n}, \tag{٨٤}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{٨٥}$$

البرهان: لنستخدم الرمز

$$\|h\|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^2 dx\right\}^{1/2} . \qquad (٨٦)$$

لنأخذ $\varepsilon > 0$. بما أن $f \in \Re$ و $f(\pi) = f(-\pi)$، فإن البناء الموصوف في التمرين ١٢ من الفصل السادس ينتج دالة مستمرة دورية بدورة 2π، الدالة h بـ

$$\|f - h\|_2 < \varepsilon . \qquad (٨٧)$$

استناداً إلى المبرهنة ٨، ١٥، يوجد هنالك متعدد مثلثي P بحيث أن $|h(x) - P(x)| < \varepsilon$ لجميع x. إذن $\|h - P\|_2 < \varepsilon$ إذا كانت P تمتلك درجة N_0، فإن المبرهنة ٨، ١١ تبين أن

$$\|h - s_N(h)\|_2 \le \|h - P\|_2 < \varepsilon \qquad (٨٨)$$

بالنسبة إلى جميع $N \ge N_0$. بالاستناد إلى (٧٢)، وبوضع $h - f$ محل f،

$$\|s_N(h) - s_N(f)\|_2 = \|s_N(h-f)\|_2 \le \|h - f\|_2 < \varepsilon . \qquad (٨٩)$$

الآن تبين متباينة المثلث (التمرين ١١، الفصل السادس)، مجتمعة مع (٨٧)، (٨٨) و(٨٩) بأن

$$\|f - s_N(f)\|_2 < 3\varepsilon \qquad (N \ge N_0). \qquad (٩٠)$$

وهذا يبرهن (٨٣). الخطوة التالية،

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\bar{g}dx = \sum_{-N}^{N} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{g(x)}dx = \sum_{-N}^{N} c_n\bar{\gamma}_n , \qquad (٩١)$$

وتبين متباينة شوارز بأن

$$\left|\int f\bar{g} - \int s_N(f)\bar{g}\right| \le \int |f - s_N(f)||g| \le \left\{\int |f - s_N|^2 \int |g|^2\right\}^{1/2} , \qquad (٩٢)$$

والتي تميل إلى 0، $N \to \infty$، استناداً إلى (٨٣). إن مقارنة (٩١) و (٩٢) تعطينا (٨٤).
أخيراً، فإن (٨٥) هي الحالة الخاصة $f = g$ لـ (٨٤).
يبين الفصل ١١ نسخة أكثر عمومية للمبرهنة ٨، ١٦.

دالة كاما The Gamma Function

ترتبط هذه الدالة ارتباطاً وثيقاً بتحليل العوامل وهي تظهر في أماكن غير متوقعة أحياناً في التحليل. إن أصل، وتاريخ، وتطور هذه الدالة مشروح بشكل مفصل في البحث الممتع لـ بي.

جي. ديفس (*مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية*، المجلد ٦٦، ١٩٥٩، الصفحات ٨٤٩–٨٦٩). *P. J. Davis (Amer. Math. Monthly, vol. 66, 1959, pp. 849-869).*
بالإضافة إلى ذلك يعتبر كتاب آرتين **A rtin's book** (المذكور في المراجع) مرجعاً جيداً للتمهيد لهذا الموضوع.

إن عرضنا لهذه الدالة سيكون مركزاً جداً، وذلك بوضع بعض الملاحظات القليلة بعد كل مبرهنة. لذلك فإنه بالإمكان اعتبار هذا الجزء بمثابة تمرين كبير وكبير جدا، لتطبيق بعض المواد التي درسناها لحد الآن.

٨، ١٧ تعريف: بالنسبة إلى $0 < x < \infty$،

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt. \qquad (٩٣)$$

إن المتكامل لهذه الـx. (عندما تكون $x < 1$، فإنه يستوجب دراسة كل من حالتي الـ 0 والـ∞).

٨، ١٨ مبرهنة:

(أ) تتحقق معادلة الدالي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

إذا كانت $0 < x < \infty$.

(ب) $\Gamma(n+1) = n!$ *بالنسبة إلى* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(ج) يكون $\log\Gamma$ *محدباً في* $(0,\infty)$.

البرهان: يبرهن التكامل (أ)بالتجزئة. بما أن $\Gamma(1) = 1$، فإن (أ) تؤدي إلى تحقيق (ب) بطريقة الاستنتاج. إذا كانت $1 < p < \infty$ و $(1/p)+(1/q) = 1$، نطبق متباينة هولدر **Hölder's inequality** (التمرين ١٠، الفصل ٦) على (٩٣)، ونحصل على

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \le \Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q}.$$

وهذا يعتبر مكافئاً إلى (ج).

في الحقيقة فإنه من المثير للاستغراب اكتشاف بوهر و موليرب **Bohr & Mollerup** بأن هذه الخصائص الثلاث هي التي توصف Γ بشكل تام.

٨، ١٩ مبرهنة: *إذا كانت f دالة موجبة في $(0,\infty)$ بحيث أن*

(أ) $f(x+1) = xf(x)$،

(ب) $f(1) = 1$،

(ج) $\log f$ *يكون محدباً،*

فإن $f(x) = \Gamma(x)$.

البرهان: بما أن Γ تحقق (أ)، (ب) و (ج)، فإنه يكفي أن نبرهن $f(x)$ تكون مقيدة فقط في (أ)، (ب)، (ج)، لجميع $x > 0$. استناداً إلى (أ)، فإنه يكفي أن نعمل ذلك لـــ $x \in (0,1)$.

ضع $\varphi = \log f$. فإن

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \log x \qquad (0 < x < \infty), \qquad (٩٤)$$

$\varphi(1) = 0$، و φ تكون محدبة. أفترض أن $0 < x < 1$ وأن n عدداً صحيحاً موجباً. استناداً إلى (٩٤)، $\varphi(n+1) = \log(n!)$. لاحظ فرق خوارج قسمة φ في الفترات $[n,n+1]$، $[n+1,n+1+x]$، $[n+1,n+2]$. بما أن φ محدبة فإن

$$\log n \le \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \le \log(n+1) \ .$$

إن تكرار تطبيق (٩٤) يعطينا

$$\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \log[x(x+1)\cdots(x+n)]$$

لذلك فإن

$$0 \le \varphi(x) - \log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right] \le x\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \ .$$

يميل الحد الجبري الأخير إلى 0 عندما $n \to \infty$. إذن تم تحديد $\varphi(x)$، وبهذا فإن البرهان قد انتهي.

كناتج عرضي فإننا نحصل على العلاقة

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad (٩٥)$$

على الأقل عندما تكون $0 < x < 1$ ؛ من هذا فإن المرء يستطيع أن يبرهن أن (٩٥) تتحقق لجميع $x > 0$،

نظراً لأن $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

٨، ٢٠ مبرهنة: *إذا كانت* $x > 0$ و $y > 0$، *فإن*

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (٩٦)$$

إن هذا المتكامل هو ما يطلق عليه *دالة بيتا* (***beta function***) $B(x,y)$.

البرهان: لاحظ بأن $B(1,y) = 1/y$، وإن $\log B(x,y)$ هو دالة محدبة لــ x، لكل y ثابتة، استناداً إلى متباينة هو لدر، كما في المبرهنة ٨، ١٨، وأن

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y). \quad (٩٧)$$

لبرهنة (٩٧)، قم بعملية التكامل بالتجزئة على الشكل الآتي

$$B(x+1,y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}dt \ .$$

تبين هذه الخواص الثلاثة لــ $B(x,y)$، لكل y، بأن المبرهنة ٨، ١٩ تنطبق على الدالة f المعرفة بــ

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}B(x,y).$$

إذن $f(x) = \Gamma(x)$.

٨، ٢١ بعض النتائج Some consequences : إن تعويض $t = \sin^2\theta$ يحول (٩٦) إلى

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (٩٨)$$

إن الحالة الخاصة التي تكون فيها $x = y = \frac{1}{2}$ تعطينا

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \quad (٩٩)$$

إن التعويض $t = s^2$ يحول (٩٣) إلى

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds \qquad (0 < x < \infty) \ . \quad (١٠٠)$$

الحالة الخاصة التي تكون فيها $x = \dfrac{1}{2}$ تعطينا

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi} \ . \quad (١٠١)$$

استناداً إلى (٩٩)، فإن المتطابقة

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \tag{١٠٢}$$

تستنتج بصورة مباشرة من المبرهنة ٨، ١٩.

٨، ٢٢ صيغة ستريلنك Stirlings formula: تقدم هذه الصيغة تعبيراً جبرياً تقريبياً بسيطاً لـ $\Gamma(x+1)$ عندما تكون x كبيرة (وإذن بالنسبة إلى $n!$ عندما تكون n كبيرة). الصيغة هي :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x\sqrt{2\pi x}} = 1 \ . \tag{١٠٣}$$

نقدم أدناه البرهان. نضع $t = x(1+u)$ في (٩٣). ينتج عن هذا إن

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{\infty}\left[(1+u)e^{-u}\right]^x du \ . \tag{١٠٤}$$

حدد $h(u)$ بحيث أن $h(0)=1$ و

$$(1+u)e^{-u} = \exp\left[-\frac{u^2}{2}h(u)\right] \tag{١٠٥}$$

إذا كانت $-1 < u < \infty$ ، $u \neq 0$. فإن

$$h(u) = \frac{2}{u^2}\left[u - \log(1+u)\right] \ . \tag{١٠٦}$$

تستنتج من ذلك إن h مستمرة، وبأن $h(u)$ تتناقص ترتيبا من ∞ إلى 0 عندما تتزايد u من 1- إلى ∞.

إن تعويض $u = s\sqrt{2/x}$ يحول (١٠٤) إلى

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_x(s)ds \tag{١٠٧}$$

حيث

$$\psi_x(s) = \begin{cases} \exp\left[-s^2 h(s\sqrt{2/x})\right] & (-\sqrt{x/2} < s < \infty), \\ 0 & (s \le -\sqrt{x/2}). \end{cases}$$

لاحظ الحقائق الآتية حول $\psi_x(s)$:

(أ) لكل s ، $\psi_x(s) \to e^{-s^2}$ عندما $x \to \infty$.

(ب) إن التقارب في (أ) يكون منتظماً في $[-A, A]$، لكل $A < \infty$.

(ج) عندما تكون $s > 0$، فإن $0 < \psi_x(s) < e^{-s^2}$.

(د) عندما تكون $s > 0$ و $x > 1$، فإن $0 < \psi_x(s) < \psi_1(s)$.

(هـ) $\int_0^\infty \psi_1(s)ds < \infty$.

لذلك يمكن تطبيق مبرهنة التقارب المذكورة في التمرين ١ من الفصل السابع على المتكامل (١٠٧)، والتي تبين أن هذا المتكامل يتقارب إلى $\sqrt{\pi}$ عندما $x \to \infty$، استناداً إلى (١٠١). وهذا يبرهن (١٠٣).

من الممكن أيجاد نسخة اكثر تفصيلاً لهذا البرهان في كتاب آر. سي بوك "التفاضل والتكامل – مستوى متقدم"، الصفحات ٢١٦–٢١٨. بالنسبة إلى البرهانين الآخرين، المختلفين تماماً، راجع مقالة دبل يو. فيلر في مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية، المجلد ٧٤، ١٩٦٧، الصفحات ١٢٢٣–١٢٢٥ (مع التصحيح المذكور في المجلد ٧٥، ١٩٦٨، الصفحة ٥١٨) والصفحات ٢٠–٢٤ من كتاب ارتين.

يقدم التمرين ٢٠ برهاناً اسهل لنتيجة أقل دقة.

تمارين EXERCISES

١- عرف

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

برهن على إن f تمتلك مشتقات لجميع الدرجات عند $x=0$ وإن $f^{(n)}(0)=0$

بالنسبة إلى $n=1,2,3,\dots$.

٢- لتكن a_{ij} العدد في الصف ألــ ith والعمود ألــ jth من الترتيب

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

بحيث أن

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & i<j,\\ -1 & i=j,\\ 2^{j-1} & i>j.\end{cases}$$

برهن على إن

$$\sum_j\sum_i a_{ij}=0 \quad , \sum_i\sum_j a_{ij}=-2 \ .$$

٣- برهن على إن $\sum_j\sum_i a_{ij} = \sum_i\sum_j a_{ij}$

إذا كانت $a_{ij}\geq 0$ لجميع i و j (قد تحدث الحالة التي تكون فيها $+\infty=+\infty$).

٤- برهن العلاقات الآتية للغاية :

(أ) $(b>0)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\log b$.

(ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$.

(ج) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

(د) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.

٥- أوجد الغايات الآتية:

(أ) $\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$.

(ب) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log n}\left[n^{1/n}-1\right]$.

(ج) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x(1-\cos x)}$.

(د) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x - x}$.

٦- افترض إن $f(x)f(y)=f(x+y)$ لجميع x , y الحقيقيين.

(أ) على افتراض أن f قابلة للتفاضل وليست صفراً، برهن على أن

$$f(x)=e^{cx}$$

حيث c ثابتة.

(ب) برهن نفس الشيء، بافتراض أن f مستمرة فقط.

٧- إذا كانت $0<x<\frac{\pi}{2}$، برهن على أن

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1 .$$

٨- بالنسبة إلى $n = 0\ ,1\ ,2\ ,\ldots$ و x حقيقية، برهن على أن

$$|\sin nx|\le n|\sin x|.$$

لاحظ بأن هذه المتباينة قد تكون خاطئة بالنسبة إلى قيم أخرى لـ n. على سبيل المثال،

$$\left|\sin \tfrac{1}{2}\pi\right| > \tfrac{1}{2}|\sin\pi|.$$

٩- (أ) ضع $s_N = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1/N\right)$. برهن على وجود

$$\lim_{N\to\infty}(s_N-\log N) .$$

(تسمى الغاية، التي غالباً ما يرمز لها بـ γ، ثابت أُولر **Euler's constant**. قيمتها العددية هي

0. ...5772 ليست معلوماً فيما إذا γ نسبية أم لا).

(ب) بصورة تقريبية ما هو مقدار الكبر الذي يجب أن تكون عليه m بحيث أن

$N = 10^m$ تحقق $s_N > 100$ ؟

١٠– برهن على أن $\sum 1/p$ يتباعد ؛المجموع يشمل جميع الأعداد الأولية.

(إن هذا يبين أن الأعداد الأولية تشكل مجموعة جزئية لاستهان بها للأعداد الصحيحة الموجبة).

تلميح : لنأخذ N ولتكن $p_1, \dots, p_k$ تلك الأعداد الأولية التي تقسم على الأقل عدداً صحيحاً واحداً $\leq N$. عندها فـإن

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \cdots\right)$$
$$= \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^{-1}$$
$$\leq \exp \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{p_j}.$$

تتحقق المتباينة الأخرى لأن

$$(1-x)^{-1} \leq e^{2x}$$

إذا كانت $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

(يوجد هنالك العديد من البراهين لهذه النتيجة. راجع، على سبيل المثال مقالة، آي. نيفين في مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية، المجلد ٧٨، ١٩٧١، الصفحات ٢٧٢–٢٧٣، ومقالة آر. بيلمان في مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية المجلد ٥٠، ١٩٤٣، الصفحات ٣١٨–٣١٩).

I. Niven in *Amer. Math. Monthly*, vol. 78, 1971, pp. 272-273. &. I
II. R. Bellman in *Amer. Math. Monthly*, vol. 50, 1943, pp. 318-319.

١١– أفترض أن $f \in \Re$ في $[0, A]$ لجميع $A < \infty$ ، وأن $f(x) \to 1$ عندما $x \to +\infty$. برهن على أن

$$\lim_{t \to 0} t \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx = 1 \qquad (t > 0).$$

١٢– أفترض أن $0 < \delta < \pi$ ، $f(x) = 1$ إذا كانت $|x| \leq \delta$, $f(x) = 0$ إذا كانت $\delta < |x| \leq \pi$ ، و $f(x + 2\pi) = f(x)$ لجميع x.

(أ) احسب معاملات فورير لــ f.

(ب) استنتج أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\delta)}{n}=\frac{\pi-\delta}{2} \qquad (0<\delta<\pi).$$

(ج) استنتج من مبرهنة بارسيفال بأن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta}=\frac{\pi-\delta}{2}.$$

(د) دع $\delta \to 0$ وبرهن على إن

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2} \ .$$

(هـ) إذا وضعت $\delta=\pi/2$ في (ج). ماذا ستحصل ؟

١٣- ضع $f(x)=x$ إذا كانت $0\le x\le 2\pi$، وطبق مبرهنة بارسيفال لاستنتاج

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \ .$$

١٤- إذا كانت $f(x)=(\pi-|x|)^2$ في $[-\pi,\pi]$، برهن على إن

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx$$

واستنتج إن

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \ .$$

(تحتوي المقالة التي نشرت مؤخراً لــ أي. أل. ستارك على العديد من الإشارات إلى المتسلسلة التي على شكل $\sum n^{-s}$، حيث أن s عدداً صحيحاً موجباً. راجع مجلة الرياضيات، المجلد ٤٧، ١٩٧٤، الصفحات ١٩٧-٢٠٢).

١٥- خذ D_n كما معرفة في (٧٧)، ضع

$$K_N(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(x) \ .$$

برهن على إن

$$K_N(x)=\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x}$$

وأن

(أ) $K_N \geq 0$،

(ب) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)dx = 1$ ،

(ج) $K_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2}{1-\cos\delta}$ إذا كانت $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$.

إذا كانت $s_N = s_N(f;x)$ المجموع الجزئي النوني لمتسلسلة فورير لـ f، لاحظ المعدل الحسابي

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_N}{N+1}.$$

برهن على إن

$$\sigma_N(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)dt,$$

ومن ثم برهن مبرهنة فيجر *Feje'r's theorem* :

إذا كانت c مستمرة، بدورة 2π، فإن $\sigma_N(f;x) \to f(x)$ بانتظام في $[-\pi,\pi]$.

تلميح : استخدم الخواص (أ)، (ب)، (ج) في ذلك كما في المبرهنة ٧، ٢٦.

١٦- برهن النسخة النقطية لمبرهنة فيجر :

إذا كانت $f \in \mathfrak{R}$ و $f(-x), f(+x)$ تتواجدان لبعض x فإن

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f;x) = \frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right].$$

١٧- افترض أن f مقيدة ورتيبة في $[-\pi,\pi]$ وبمعاملات فورير c_n، كما مذكورة في(٦٢).

(أ) استخدم التمرين ١٧ من الفصل السادس للبرهنة على إن $\{nc_n\}$ تكون متتالية مقيدة.

(ب) أربط (أ) مع التمرين ١٦ والتمرين ١٤ (هـ) من الفصل الثالث لتستنتج إن

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f;x) = \frac{1}{2}\left[f(x+1) + f(x-)\right]$$

لكلx.

(ج) افترض فقط إن $f \in \mathfrak{R}$ في $[-\pi,\pi]$ وإن f رتيبة في بعض القطع $(\alpha,\beta) \subset [-\pi,\pi]$. برهن على إن استنتاج (ب) يتحقق لكل $x \subset (\alpha,\beta)$.

برهن على إن استنتاج (ب) يتحقق لكل $x \in (\alpha,\beta)$.

(يعتبر هذا تطبيقاً لمبرهنة التمركز).

١٨- عرف

$$f(x) = x^3 - \sin^2 x \tan x$$
$$g(x) = 2x^2 - \sin^2 x - x \tan x$$

أوجد، لكل من هاتين الدالتين، فيما إذا كانت موجبة أو سالبة لجميع $x \in (0, \pi/2)$، أو فيما إذا كانت تُغير الإشارة. برهن جوابك.

١٩- أفترض إن f دالة مستمرة في $\mathbf{R}^1$، $f(x+2\pi) = f(x)$ و α/π غير نسبية. برهن على إن

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

لكل x. تلميح : قم بذلك أولاً بالنسبة إلى $f(x) = e^{ikx}$.

٢٠- ينتج الاحتساب البسيط الآتي تقريباً جيداً لصيغة ستريلنك.

بالنسبة إلى $m = 1,2,3,\ldots$، عرف

$$f(x) = (m+1-x)\log m + (x-m)\log(m+1)$$

إذا كانت $m \le x \le m+1$، وعرف

$$g(x) = \frac{x}{m} - 1 + \log m$$

إذا كانت $m - \frac{1}{2} \le x \le m + \frac{1}{2}$. أرسم الرسم البياني لـ f و g. لاحظ بأن $f(x) \le \log x \le g(x)$ إذا كانت $x \ge 1$ وإن

$$\int_1^n f(x)\,dx = \log(n!) - \frac{1}{2}\log n > -\frac{1}{8} + \int_1^n g(x)\,dx .$$

كامل $\log x$ فوق $[1,n]$. استنتج إن

$$\frac{7}{8} < \log(n!) - (n+\frac{1}{2})\log n + n < 1$$

بالنسبة إلى $n = 2,3,4,\ldots$ (ملاحظة : $(\log\sqrt{2\pi} \sim 0.918\ldots)$ لذلك فإن

$$e^{7/8} < \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} < e \ .$$

٢١- لتكن $L_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$.

برهن على أنه يوجد هنالك ثابتاً $c > 0$ بحيث أن

$$L_n > c\log n \qquad (n = 1,2,3,\ldots),$$

أو، بصورة أكثر دقة، إن المتتالية

$$\left\{L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right\}$$

تكون مقيدة.

٢٢- إذا كانت α حقيقية و $-1 < x < 1$، برهن مبرهنة ذات الحدين لنيوتن

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n .$$

تلميح : أرمز للجهة اليمنى بـــ $f(x)$. برهن على إن المتسلسلة تتقارب. برهن على إن

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

وحل هذه المعادلة التفاضلية.

بين أيضاً بأن

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}x^n$$

إذا كانت $-1 < x < 1$ و $\alpha > 0$.

٢٣- لتكن γ منحنياً مغلقاً مستمراً وقابلاً للتفاضل في المستوي المركب، بفترة وسيطة $[a,b]$، وافترض إن $\gamma(t) \neq 0$ لكل $t \in [a,b]$. عرف دليل *index* لــ γ ليكون

$$Ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt .$$

برهن على إن $\text{Ind}(\gamma)$ يكون دائماً عدداً صحيحاً.

تلميح : يوجد هنالك φ في $[a,b]$ بحيث أن $\varphi' = \gamma'/\gamma$، $\varphi(a) = 0$. إذن يكون $\gamma\exp(-\varphi)$ مقداراً ثابتاً. بما أن $\gamma(a) = \gamma(b)$ فإن ذلك يؤدي إلى أن $\exp\varphi(b) = \exp\varphi(a) = 1$. لاحظ بأن $\varphi(b) = 2\pi i\text{Ind}(\gamma)$.

احتسب $\text{Ind}(\gamma)$ عندما تكون $b = 2\pi, a = 0, \gamma(t) = e^{int}$. بين لماذا يطلق على $\text{Ind}(\gamma)$ ***العدد اللوبي*** لــ γ ***the Winding number of*** حول 0.

٢٤- لتكن γ معرفة كما في التمرين ٢٣، وأفترض إضافة لذلك إن مدى γ لا يقاطع المحور الحقيقي السالب. برهن على إن $\text{Ind}(\gamma) = 0$. *تلميح:* بالنسبة إلى $0 \le c < \infty$،

تكون $\mathrm{Ind}(\gamma + c) = 0$ دالة مستمرة ذات قيم صحيحة لـ c. وكذلك، $\mathrm{Ind}(\gamma + c) \to 0$ عندما $c \to \infty$.

٢٥- أفترض أن γ_1 و γ_2 منحنيان كما في التمرين ٢٣، و

$$\left|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\right| < \left|\gamma_1(t)\right| \qquad (a \le t \le b).$$

برهن على أن $\mathrm{Ind}(\gamma_1) = \mathrm{Ind}(\gamma_2)$.

تلميح : ضع $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$ فإن $\left|1 - \gamma\right| < 1$، إذن $\mathrm{Ind}(\gamma) = 0$ استناداً إلى التمرين ٢٤، كذلك،

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}.$$

٢٦- لتكن γ منحنياً مغلقاً في المستوي المركب (ليس بالضرورة قابلاً للتفاضل) بفترة وسطية $[0,2\pi]$، بحيث أن $\gamma(t) \neq 0$ لكل $t \in [0,2\pi]$.

اختار $\delta > 0$ بحيث أن $|\gamma(t)| > \delta$ لجميع $t \in [0,2\pi]$. إذا كانت P_1 و P_2 متعددي الحدود مثلثين بحيث أن $\left|P_j(t) - \gamma(t)\right| < \delta/4$ لجميع $t \in [0,2\pi]$ (وجودهما مبرهن في المبرهنة ٨، ١٥)، برهن على أن

$$\mathrm{Ind}(P_1) = \mathrm{Ind}(P_2)$$

وذلك بتطبيق التمرين ٢٥.

عرف هذه القيمة المشتركة بـ $\mathrm{Ind}(\gamma)$.

برهن على أن عبارات التمرينين ٢٤ و ٢٥ تتحقق بدون أي افتراض حول القابلية على التفاضل.

٢٧- لتكن f دالة مركبة مستمرة معرفة في المستوي المركب. أفترض أنه يوجد هنالك عدداً صحيحاً موجباً n وعدداً مركب $c \neq 0$ بحيث أن

$$\lim_{|z| \to \infty} z^{-n} f(z) = c.$$

برهن على أن $f(z) = 0$ لعدد عقدي واحد z على الأقل.

لاحظ بأن هذا هو تعميم للمبرهنة ٨، ٨.

تلميح : أفترض أن $f(z) \neq 0$ لجميع z، عرف

$$\gamma_r(t) = f(re^{it})$$

بالنسبة إلى $0 \le r < \infty$ ، $0 \le T \le 2\pi$ ، وبرهن العبارات التالية حول المنحنيات γ_r :

(أ) $\operatorname{Ind}(\gamma_0) = 0$.

(ب) $\operatorname{Ind}(\gamma_r) = n$ بالنسبة إلى r الكبيرة بما فيها الكفاية.

(ج) $\operatorname{Ind}(\gamma_r)$ تكون دالة مستمرة لـــ r في $[0, \infty)$.

[استخدم الجزء الأخير من التمرين ٢٦ في (ب) و(ج)].

بين أن (أ)، (ب)و(ج) يكونون متناقضين، نظراً لأن .

٢٨- لتكن $\overline{D}$ وحدة القرص المغلقة في المستوي المركب. (لذلك فإن $z \in \overline{D}$ إذا وإذا فقط كانت $|z| \le 1$). لتكن g تطبيقاً مستمراً لـــ $\overline{D}$ في وحدة الدائرة T. (لذلك فإن $|g(z)| = 1$ لكل $z \in \overline{D}$. برهن على أن $g(z) = -z$ بالنسبة إلى $z \in T$ واحدة على الأقل.

تلميح : بالنسبة إلى $0 \le r \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$ ، ضع

$$\gamma_r(t) = g(re^{it}),$$

وضع $\psi(t) = e^{-it}\gamma_1(t)$. إذا كانت $g(z) \ne -z$ لكل $z \in T$ ، فإن $\psi(t) \ne -1$ لكل $t \in [0,2\pi]$. إذن $\operatorname{Ind}(\psi) = 0$ ، استناداً إلى التمرين ٢٤ و٢٦ يؤدي إلى أن $\operatorname{Ind}(\gamma_1) = 1$. ولكن $\operatorname{Ind}(\gamma_0) = 0$. توصل إلى تناقض، كما في التمرين ٢٧.

٢٩- برهن على أن كل تطبيق مستمر f لـــ $\overline{D}$ في $\overline{D}$ يمتلك نقطة ثابتة " الصامدة " في $\overline{D}$.

(هذه هي حالة البعدين لمبرهنة النقطة الثابتة "الصامدة" لـــ بروويز).

(Brouwer's fixed -point theorem)

تلميح : أفترض أن $f(z) \ne z$ لكل $z \in \overline{D}$. رافق لكل $z \in \overline{D}$ النقطة $g(z) \in T$ التي تقع في الشعاع الذي يبدأ في $f(z)$ والتي تمر عبر z. عندها فإن g تطبيق $\overline{D}$ في T، $g(z) = z$ إذا كانت $z \in T$ ، و g مستمرة، لأن

$$g(z) = z - s(z)[f(z) - z],$$

حيث $s(z)$ هي الجذر الغير سالب الوحيد لمعادلة من الدرجة الثانية التي معاملاتها دوالاً مستمرة لـــ f و z. طبق التمرين ٢٨.

الفصل التاسع

دوال المتغيرات المتعددة

- التحويلات الخطية
- التفاضل
- مبدأ الانكماش (التقليص)
- مبرهنة الدالة العكسية
- مبرهنة الدالة الضمنية
- مبرهنة الرتبة
- المحددات
- المشتقات ذات الرتبة الأعلى
- تفاضل التكامل
- تمارين

الفصل التاسع
دوال المتغيرات العديدة
Function of Several Variables

التحويلات الخطية Linear Transformations

نبتدأ بهذا الفصل بدراسة مجموعات المتجهات في الفضاء الإقليدي النوني $\mathbf{R}^n$. إن الحقائق الجبرية المقدمة هنا تتوسع بدون تغيير إلى الفضاءآت المتجهة ذات الأبعاد المنتهية فوق أي حقل غير متجه. على الرغم من ذلك، فإنه يكفي لأغراضنا هنا أن نبقى ضمن الإطار المألوف للفضاءآت الأقليدية.

٩، ١ تعاريف:

(أ) تكون المجموعة الغير خالية $X \subset \mathbf{R}^n$ فضاءاً متجهاً إذا كانت $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in X$ و $c\mathbf{x} \in X$ لجميع $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ ولجميع المتجهات c.

(ب) إذا كانت $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ و $c_1,\ldots,c_k$ متجهات، يسمى المتجه

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$$

تركيبة توافقية خطية لـ $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ *linear combination of*. إذا كانت $S \subset \mathbf{R}^n$ وإذا كانت E مجموعة جميع التوافقيات الخطية لعناصر S، نقول أن S *تمتد فوق* *spans E*، وإن E *امتداد* *S span*.

لاحظ أن كل امتداد يكون فضاءاً متجهاً.

(ج) يقال للمجموعة التي تتألف من المتجهات $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ (سوف نستخدم الترميز $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\}$ لمثل هذه المجموعة) بأنها *مستقلة* ***independent*** إذا كانت العلاقة $c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = 0$ تؤدي إلى أن $c_1 = \cdots = c_k = 0$. خلافاً لذلك يقال لـ $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k\}$ بأنها *تابعة* (*معتمدة*) ***dependent***.

لاحظ بأن المجموعة المستقلة لا تحوي على متجه الخمود null vector.

(د) إذا كان الفضاء المتجه X يحتوي على مجموعة مستقلة من المتجهات r ولكن لا يحوي على

أي مجموعة مستقلة من المتجهات $r+1$، فإننا نقول أن X تمتلك *البعد* ***r dimension***، ونكتب: $\dim X = r$.

إن المجموعة التي تتألف من 0 فقط تكون فضاءاً متجهاً ؛ ويكون بعدها 0.

(هـــ) تسمى المجموعة الجزئية المستقلة للفضاء المتجه X التي تمتد عبر X، *أساس* ***X basis***.

لاحظ بأنه إذا كانت $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ أساساً لــ X، فإن كل $\mathbf{x} \in X$ تمتلك تمثيلاً وحيداً على شكل $\mathbf{x} = \sum c_j \mathbf{x}_j$. إن تمثيلاً كهذا يتواجد نظراً لأن B تمتد عبر X، وهو وحيد نظراً لأن B مستقلة. تسمى الأعداد $c_1, \ldots c_r$ *إحداثيات لـــ* ***coordinates of x*** وفقاً للأساس B.

من أكثر الأمثلة المألوفة حول الأساس هي المجموعة $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$، حيث إن ألـــ $\mathbf{e}_j$ هي المتجه في $\mathbb{R}^n$ التي احداثيها ألـــ jth يساوي 1 أو جميع الإحداثيات الأخرى تساوي 0. إذا كانت $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، $\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_n)$، فإن $\mathbf{x} = \sum x_j \mathbf{e}_j$. سوف نسمي

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

الأساس القياسي لـــ ***standard basis of*** $\mathbb{R}^n$.

٩، ٢ مبرهنة: *لتكن r عدداً صحيحاً موجباً. إذا كان الفضاء المتجه X ممتداً بمجموعة المتجهات r، فإن* $\dim X \le r$.

البرهان: إذا كان هذا خاطئاً، يوجد هنالك فضاءاً متجهاً X والذي يحتوي المجموعة المستقلة $Q = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{r+1}\}$ والذي يكون ممتداً بالمجموعة S_0 التي تتألف من لمتجهات r.

أفترض أن $0 \le i < r$، وأفترض أن المجموعة S_i قد بنيت بحيث تمتد عبر X والتي تتألف من جميع ألـــ $\mathbf{y}_j$ بحيث أن $1 \le j \le i$ إضافة إلى مجموعة معينة من العناصر $r-i$ لـــ S_0، لنقل $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r-i}$. (وبكلمة أخرى، إن S_i يحصل عليها من S_0 باستبدال i من عناصرها بعناصر من Q، بدون تغير الامتداد).

بما أن S_i تمتد عبر X، فإن $\mathbf{y}_{i+1}$ وهي امتداد لـــ S_i؛ أذن يوجد هنالك غير متجهات $a_1, \ldots, a_{i+1}$، $b_1, \ldots, b_{r-i}$، بـــ $a_{i+1} = 1$ بحيث إن

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k \mathbf{x}_k = 0$$

إذا كانت جميع ألــ b_k's تساوي صفر، فإن استقلالية Q سوف تجبر جميع ألــ a_j لتكن 0، وهذا تناقض. يؤدي ذلك إلى أن بعض $\mathbf{x}_k \in S_i$ يكون توفيقية خطية للأعضاء الأخرى من $T_i = S_i \cup \{\mathbf{y}_{i+1}\}$. احذف هذا الــ $\mathbf{x}_k$ من T_i، وسمي المجموعة المتبقية S_{i+1}. عندها فإن S_{i+1} يمتد عبر نفس المجموعة مثل T_i، وبالتحديد X، لذلك فإن S_{i+1} تمتلك نفس الخواص المتعلقة بــ S_i بوضع $i+1$ محل i.

بالابتداء بــ S_0، نكون بذلك قد كونا المجموعات $S_1,\ldots,S_r$. الأخير منها يتألف من $\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_r$، ويبين تكويننا بأنها تمتد عبر X. لكن Q مستقلة، إذن فإن $\mathbf{y}_{r+1}$ ليست امتداد S_r. إن هذا التناقض يبرهن المبرهنة.

نتيجة $\dim \mathbf{R}^n = n$.

البرهان بما أن $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ تمتد عبر $\mathbf{R}^n$، فإن المبرهنة تبين إن $\dim \mathbf{R}^n \le n$. بما أن $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ مستقلة، فإن $\dim \mathbf{R}^n \ge n$.

٩، ٣ مبرهنة: *لنفترض أن X فضاءاً متجهاً، و $\dim X = n$.*

(أ) المجموعة E التي تتكون من المتجهات n في X تمتد عبر X إذا وإذا فقط كانت E مستقلة.

(ب) تمتلك X أساسا، وكل أساس يتكون من n من المتجهات.

(ج) إذا كانت $1 \le r \le n$، وكانت $\{\mathbf{y}_1,\ldots\mathbf{y}_r\}$ مجموعة مستقلة في X، فإن X تمتلك أساساً يحتوي على $\{\mathbf{y}_1,\ldots\mathbf{y}_r\}$.

البرهان: لنفترض إن $E = \{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$. بما أن $\dim X = n$، فإن المجموعة $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}\}$ تكون معتمدة، لكل $\mathbf{y} \in X$. إذا كانت Eمستقلة، فإن ذلك يؤدي إلى إن $\mathbf{y}$ تقع في امتداد E، إذن E تمتد عبر X. وبالعكس، إذا كانت E معتمدة، فإنه بالإمكان انتزاع أحد عناصرها دون أن يغير ذلك من امتداد E. إذن E لا تستطيع إن تكون امتداد X، استناداً إلى المبرهنة ٩، ٢ وهذا يبرهن (أ).

بما أن $\dim X = n$، فإن X تحتوي على مجموعة مستقلة تتكون من المتجهات n، ويبين (أ) أن أي مجموعة كهذه تكون أساساً لــ X. تستنتج (ب) الآن من ٩، ١ (د) و٩، ٢.

لبرهنة (ج)، لتكن $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ الأساس لـ X. المجموعة

$$S=\{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_r,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$$

تمتد عبر X وتكون تابعة (معتمدة) نظراً لأنها تحتوي على أكثر من n من المتجهات. تبين الفكرة التي استخدمت في برهان المبرهنة ٩، ٢ بأن واحداً من الـ $\mathbf{x}_i's$ يكون توافقياً خطياً للعناصر الأخرى لـ S. إذا قمنا بانتزاع هذا الـ $\mathbf{x}_i$ من S، فإن المجموعة المتبقية تبقى على امتدادها عبر X. بالإمكان تكرار هذه العملية لـ r من المرات الأمر الذي يؤدي إلى أيجاد أساساً لـ X يحتوي على $\{\mathbf{y}_1,\ldots\mathbf{y}_r\}$، استناداً إلى (أ).

٩، ٤ تعاريف: يقال للتطبيق A للفضاء المتجه X في الفضاء المتجه Y بأنه *تحويل خطي* *Linear Transformation* إذا كانت

$$A(c\mathbf{x})=cA\,\mathbf{x} \qquad , A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=A\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2$$

لكل $\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in X$ وجميع الغير متجهات c. لاحظ بأنه غالباً ما تكتب $A\,\mathbf{x}$ بدلاً من $A(\mathbf{x})$ إذا كانت A خطية.

لاحظ بأن $A0=0$ إذا كانت A خطية. ولاحظ أيضاً بأن التحويل الخطي A لـ X في Y يتحدد كلياً بسلوكه في أي أساس: إذا كانت $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ الأساس لـ X، فإن $\mathbf{x}\in X$ تمتلك تمثيلاً منفرداً على شكل

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{x}_i ،$$

كما وأن خطية A تسمح لنا باحتساب $A\,\mathbf{x}$ من المتجهات $A\mathbf{x}_1,\ldots,A\mathbf{x}_n$ والإحداثيات $c_1,\ldots,c_n$ وفق الصيغة

$$A\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}c_iA\mathbf{x}_i .$$

غالباً ما يطلق على التحويلات الخطية لـ X *"المؤثرات الخطية"* ***linear operator*** في X. إذ ا كان A مؤثراً خطياً في X والذي (i) واحد -لـ- واحد و (ii) يطبق في X (onto)، فأننا نقول إن A *قابل للعكس* ***invertible***. في هذه الحالة نستطيع تعريف المؤثر A^{-1} في X بأنه يحقق $A^{-1}(A\mathbf{x})$ لجميع $\mathbf{x}\in X$. في هذه الحالة يكون لدينا أيضاً $A^{-1}(A\mathbf{x})=\mathbf{x}$ لجميع $\mathbf{x}\in X$، وإن A^{-1} تكون خطية ؛ وإن مسألة إثبات هاتين العلاقتين واضحة جداً و لا تستحق الذكر.

هنالك حقيقة مهمة بخصوص المؤثرات الخطية في فضاءآت المتجهات ذات الأبعاد المنتهية وهي إن كلاً من الشرطين (i) و (ii) أعلاه يؤدي إلى تحقيق الآخر:

٩، ٥ مبرهنة: *يكون المؤثر الخطي A في الفضاء المتجه ذو الأبعاد المنتهية X واحداً -لـ- واحداً إذا وإذا فقط كان مدى A هو جميع X.*

البرهان: ليكن $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ الأساس لـ X. تبين خطية A إن مداها $\mathcal{R}(A)$ يكون الامتداد للمجموعة. $Q=\{A\mathbf{x}_1,\ldots,A\mathbf{x}_n\}$ لذلك فإننا نستنتج من المبرهنة ٩، ٣ (أ) بأن $\mathcal{R}(A)=X$ إذا وإذا فقط، كانت Q مستقلة. يجب علينا أن نبرهن إن هذا يحدث إذا وإذا فقط كانت A واحداً -لـ-واحد.

أفترض أن A هو واحد -لـ- واحد وأن $\sum c_i A\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$. عندها فإن $A(\sum c_i\mathbf{x}_i)=\mathbf{0}$، إذن $\sum c_i\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$، إذن $c_i=\cdots=c_n=0$، ونستنتج من ذلك أن، Q هي مستقلة.

وبالعكس، أفترض أن Q هي مستقلة وأن $A(\sum c_i\mathbf{x}_i)=\mathbf{0}$. فإن $\sum c_i A\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$، إذن $c_1=\cdots=c_n=0$، ونستنتج من ذلك أن: $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ إذا فقط $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. الآن إذا كانت $A\mathbf{x}=A\mathbf{y}$ فإن $A\mathbf{x}=A\mathbf{y}$، فإن $A(\mathbf{x}-\mathbf{y})=A\mathbf{x}-A\mathbf{y}=\mathbf{0}$، لذلك فإن $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{0}$، وهذا يعني إن A هي واحد -لـ- واحد.

٩، ٦ تعاريف:

(أ) لتكن $L(X,Y)$ المجموعة التي تضم جميع التحويلات الخطية للفضاء المتجه X في الفضاء المتجه Y. بدلاً من $L(X,X)$ فإننا سوف تكتب $L(X)$ فقط. إذا كانت $A_1,A_2\in L(X,Y)$ وكان $c_1 . c_2$ غير متجهين، نعرف $(c_1A_1+c_2A_2)$ بـ

$$(\mathbf{c}_1A_1+\mathbf{c}_2A_2)\mathbf{x}=\mathbf{c}_1A_1\mathbf{x}+\mathbf{c}_2A_2\mathbf{x}\qquad(\mathbf{x}\in X).$$

عندها فإنه من الواضح إن $(c_1A_1+c_2A_2)\in L(X,Y)$.

(ب) إذا كانت X,Y,Z فضاءآت متجه، وكانت $A\in L(X,Y)$ و $B\in L(Y,Z)$، فإننا نعرف حاصل ضربهما AB تركيب A و B:

$$(BA)\mathbf{x}=B(A\mathbf{x})\qquad(\mathbf{x}\in X).$$

عندها فإن $BA\in L(X,Z)$.

لاحظ بأنه ليس بالضرورة أن يكون AB هو نفس BA حتى إذا كانت $X = Y = Z$.

(ج) بالنسبة إلى $A \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ عرف المعيار $\|A\|$ لـ A، بأن يكون الـ sup لجميع الأعداد $|A\mathbf{x}|$ حيث تمتد $\mathbf{x}$ عبر جميع المتجهات في $\mathbf{R}^n$ بحيث إن $|\mathbf{x}| \le 1$.

لاحظ بأن المتباينة

$$|A\mathbf{x}| \le \|A\||\mathbf{x}|$$

تتحقق بالنسبة إلى جميع $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. وكذلك، إذا كانت λ تحقق $|A\mathbf{x}| \le \lambda|\mathbf{x}|$ لجميع $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$، فإن $\|A\| \le \lambda$.

٩، ٧ مبرهنة :

(أ) إذا كانت $A \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$، فإن $\|A\| < \infty$ وتكون تطبيقاً مستمراً بانتظام لـ $\mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$.

(ب) إذا كانت $A,B \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ و c غير متجه، فإن

$$\|A+B\| \le \|A\|+\|B\| \quad , \quad \|cA\| = |c|\|A\|.$$

وتعرف المسافة بين A و B بـ $\|A-B\|$، ويكون $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ فضاءاً مترياً.

(ج) إذا كانت $A \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ و $B \in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^k)$، فإن

$$\|BA\| \le \|B\|\|A\|.$$

البرهان:

(أ) لتكن $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ الأساس القياسي في $\mathbf{R}^n$ وافترض إن $\mathbf{x} = \sum c_i\mathbf{e}_i$، $|\mathbf{x}| \le 1$، بحيث إن $|c_i| \le 1$ لـ $i = 1,\dots,n$ فإن

$$|A\mathbf{x}| = \left|\sum c_i A\mathbf{e}_i\right| \le \sum |c_i||A\mathbf{e}_i| \le \sum |A\mathbf{e}_i|$$

لذلك فإن

$$\|A\| \le \sum_{i=1}^{n} |A\mathbf{e}_i| < \infty.$$

بما أن $|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| \le \|A\||\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ إذا كانت $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$، نلاحظ بأن A مستمرة بانتظام.

تستنتج المتباينة في (ب) من

$$|(A+B)\mathbf{x}| = |A\mathbf{x}+B\mathbf{x}| \le |A\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \le (\|A\|+\|B\|)|\mathbf{x}| .$$

وتتم برهنة الجزء الثاني من (ب) بنفس الطريقة إذا كانت

$$A, B, C \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

لدينا متباينة المثلث

$$\|A-C\| = \|(A-B)+(B-C)\| \le \|A-B\| + \|B-C\|$$

ومن السهولة إثبات أن $\|A-B\|$ تمتلك الخصائص الأخرى للفضاء المتري (التعريف ٢، ١٥).

(ج) أخيراً فإن، (ج) تستنتج من

$$|(BA)\mathbf{x}| = |B(A\mathbf{x})| \le \|B|A\mathbf{x}\| \le \|B\|\|A\||\mathbf{x}| .$$

بما أننا نمتلك الآن قياسات مترية في الفضاءات $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$، فإن مفاهيم المجموعة المفتوحة، الاستمرارية، ... الخ تعطي مدلولاتها بالنسبة إلى هذه الفضاءات ؛ تستند المبرهنة الآتية على هذه المفاهيم.

٩، ٨ مبرهنة: *لتكن Ω المجموعة التي تضم جميع المؤثرات الخطية القابلة لعكسها في* $\mathbf{R}^n$.

(أ) *إذا كانت* $A \in \Omega$ ، $B \in L(\mathbf{R}^n)$، و

$$\|B-A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$$

فإن $B \in \Omega$.

(ب) *تكون Ω مجموعة جزئية مفتوحة لـــ،* $L(\mathbf{R}^n)$ *ويكون التطبيق* $A \to A^{-1}$ *مستمراً في* Ω.

(من الواضح أيضاً إن هذا التطبيق يكون 1-1لـــ Ω في Ω، والتي هي معكوس نفسها).

البرهان:

(أ) ضع $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$، ضع $\beta = \|B-A\|$. عندها فإن $\beta < \alpha$. لكل $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$،

$$\alpha|\mathbf{x}| = \alpha|A^{-1}A\mathbf{x}| \le \alpha\|A^{-1}\| \cdot |A\mathbf{x}|$$
$$= |A\mathbf{x}| \le |(A-B)\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \le \beta|\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}|$$

لذلك فإن

$$(\alpha-\beta)|\mathbf{x}| \le |B\mathbf{x}| \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n) \qquad (١)$$

بما أن $\alpha - \beta > 0$، فإن (١) تبين إن $B\mathbf{x} \ne 0$ إذا كانت $\mathbf{x} \ne 0$. إذن B هي 1 -1.

استناداً إلى المبرهنة ٩، ٥ $B \in \Omega$. هذا يتحقق بالنسبة إلى جميع B التي تكون فيها

$\|B-A\| < \alpha$. وهذا لدينا (أ) وحقيقة كون Ω مفتوحة.

(ب) الخطوة الآتية نستبدل $\mathbf{x}$ بـ $B^{-1}\mathbf{y}$ في (١). تبين المتباينة الناتجة عن ذلك

$$(\alpha-\beta)|B^{-1}\mathbf{y}| \le |BB^{-1}\mathbf{y}| = |\mathbf{y}| \qquad (\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n) \tag{٢}$$

تبين ذلك $\|B^{-1}\| \le (\alpha-\beta)^{-1}$. المتطابقة

$$B^{-1} - A^{-1} \le B^{-1}(A-B)A^{-1}$$

بالارتباط مع المبرهنة ٩، ٧ (ج)، بأن

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\| \le \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}.$$

وهذا يثبت تأكيد الاستمرارية المذكور في (ب)، نظراً لأن $\beta \to 0$ عندما $B \to A$.

٩، ٩ المصفوفات Matrices: أفترض إن $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\}$ و $\{\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_m\}$ أساسان للفضائيين المتجهين X و Y على التوالي. عندها فإن كل $A \in L(X,Y)$ تحدد مجموعة من الأعداد a_{ij} بحيث إن

$$A\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \qquad (1 \le j \le n). \tag{٣}$$

من الملائم تصوير هذه الأعداد بترتيب مستطيلي يتألف من m من الصفوف و n من الأعمدة، يسمى *مصفوفة matrix*:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

لاحظ بأن الإحداثيات a_{ij} للمتجه $A\mathbf{x}_j$ (بالاستناد إلى الأساس $\{\mathbf{y}_1,\ldots\mathbf{y}_m\}$) تظهر في العمود الـ *jth* لـ $[A]$. لذلك فإن المتجهات $A\mathbf{x}_j$ تسمى *أحيانا المتجهات العمودية* لـ $[A]$. *Column of vector* وفقاً لهذا الاصطلاح *فإن مدى A يمتد بالمتجهات العمود لـ* $[A]$. *Range of A spanned by column vector of* $[A]$

إذا كانت $\mathbf{x} = \sum c_j \mathbf{x}_j$، فإن خطية A، سوية مع (٣)، تبين أن

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)\mathbf{y}_i \tag{٤}$$

لذلك فإن إحداثيات $A\mathbf{x}$ هي $\sum_j a_{ij}c_j$ لاحظ بأن الجمع في (٣) يمتد عبر الرمز الحرفي الأول لـ a_{ij}، ولكننا نجمع عبر الحرف الرمزي الثاني عند احتساب الإحداثيات.

أفترض بعدها أننا نأخذ المصفوفة m بـ n، ذات المدخلات الحقيقية a_{ij}. إذا تم بعد ذلك تعريف A كما في (٤)، فإنه من الواضح أن $A \in L(X,Y)$ و أن $[A]$ هي المصفوفة المأخوذة. لذلك يوجد هنالك تراسل 1-1 طبيعي بين $L(Y,X)$ والمجموعة التي تضم جميع المصفوفات ذات الأبعاد m في n. نؤكد هنا أن $[A]$ لا تعتمد فقط على A ولكن أيضا على الأسس في Xو Y. إن نفس الـ A قد تولد مصفوفات متعددة ومختلفة إذا ما غيرنا الأساس، والعكس بالعكس. سوف لا نطيل في هذه الملاحظة أكثر من ذلك وذلك لأننا سنتعامل بشكل رئيسي مع الأسس الثابتة (توجد هنالك بعض الملاحظات حول هذه النقطة في الجزء ٩، ٣٧).

إذا كانت Z فضاءاً متجهاً ثالثاً، بالأساس $\{\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_p\}$، إذا كان A كما في (٣)، وإذا كانت

$$B\mathbf{y}_i = \sum_k b_{k_i}\mathbf{z}_k \quad , \quad (BA)\mathbf{x}_j = \sum_k c_{k_j}\mathbf{z}_k$$

فإن $A \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$, $BA \in L(X,Z)$، ونظراً لأن

$$B(A\mathbf{x}_j) = B\sum_i a_{ij}\mathbf{y}_i = \sum_i a_{ij}B\mathbf{y}_i$$

$$= \sum a_{ij}\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k = \sum_k\left(\sum_i b_{ki}a_{ij}\right)\mathbf{z}_k ,$$

فإن استقلالية $\{\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_p\}$ تؤدي إلى أن

$$c_{kj} = \sum_i b_{ki}a_{ij} \qquad (1 \le k \le p,\ \ 1 \le j \le n). \tag{٥}$$

يبين هذا كيفية احتساب المصفوفة $[BA]$ ذات الأبعاد p في n من $[B]$ و $[A]$. إذا قمنا بتعريف حاصل الضرب $[A]$ $[B]$ ليكون $[BA]$، فإن (٥) توصف القاعدة الاعتيادية لضرب المصفوفات.

أخير، افترض إن $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$ و $\{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_m\}$أساسان قياسيان لـ و$\mathbf{R}^m$، وإن A كما في (٤)تبين متباينة شوارز بأن

$$|A\mathbf{x}|^2 = \sum_i\left(\sum_j a_{ij}c_j\right)^2 \le \sum_i\left(\sum_j a_{ij}^2 \cdot \sum_j c_j^2\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2|\mathbf{x}|^2$$

لذلك فإن

$$\|A\| \le \left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2} \qquad (٦)$$

إذا قمنا بتطبيق (٦) على $B-A$ بدلاً من A، حيث $A,B \in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ ، نلاحظ إنه إذا كانت عناصر المصفوفة a_{ij} دوالاً مستمرة لوسيط، فإن نفس الشيء يصح على A. بصورة أكثر دقة .

إذا كانت S فضاءاً مترياً، وإذا كانت $a_{11},\ldots,a_{mm}$ دوالاً مستمرة حقيقية في S، وإذا كان $p \in S$ ، A_p هو التحويل الخطي لـــ $\mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$ الذي تمتلك مصفوفاته المدخلات $a_{ij}(p)$، فإن التصوير $p \to A_p$ يكون تطبيقاً مستمراً لـــ S في $L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$.

التفاضل Differentiation

٩، ١٠ تمهيدات: بغية التوصل إلى تعريف لمشتقة الدالة التي منطلقها $\mathbf{R}^n$ (أو مجموعة جزئية مفتوحة في $\mathbf{R}^n$)، لنلقي نظرة أخرى على الحالة المألوفة $n=1$، لنتعرف على كيفية تفسير المشتقة في تلك الحالة بالطريقة الممكن توسيعها بصورة طبيعية لتشمل $n>1$.

إذا كانت f دالة حقيقية بمنطلق $(a,b) \subset \mathbf{R}^1$ وإذا كانت $x \in (a,b)$ فإنه غالباً ما يتم تعريف $f'(x)$ بأنها العدد الحقيقي

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad (٧)$$

بالطبع، شريطة أن تكون هذه الغاية موجودة. لذلك فإن

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)h + r(h) \qquad (٨)$$

حيث أن "المتبقي" "remainder" يكون صغيراً، بمفهوم أن

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \qquad (٩)$$

لاحظ بأن (٨) تعبر عن الفرق $f(x+h)-f(x)$ كمجموع *للدالة الخطية Linear function* التي توصل h إلى $f'(x)h$ ، زائد متبقي صغير.

لذلك نستطيع اعتبار مشتقة f عند x، بأنها ذلك المؤثر الخطي في $\mathbf{R}^1$ الذي يوصل h إلى $f'(x)h$ وليس كعدد حقيقي.

[لاحظ بأن كل عدد حقيقي α يولد يعطي مؤثر خطي في $\mathbf{R}^1$ ؛ وهذا المؤثر هو عبارة عن ناتج الضرب في α. وبالعكس، فإن كل دالة خطية توصل $\mathbf{R}^1$ إلى $\mathbf{R}^1$ تكون حصيلة الضرب ببعض الأعداد الحقيقية. إن هذا التراسل الطبيعي الـ 1 - 1 بين $\mathbf{R}^1$ و $L(\mathbf{R}^1)$ هو الباعث للعبارات السابقة].

لنتفحص الآن الدالة $\mathbf{f}$ التي تطبق $(a,b) \in \mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^m$. في هذه الحالة، تم تعريف $\mathbf{f}'(x)$ بأنها المتجه $y \in \mathbf{R}^m$ (إذا كان موجوداً) والذي يكون فيه

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)}{h} - y\right\} = 0 \qquad (١٠)$$

ونستطيع أيضاً إعادة كتابة ذلك بالشكل الآتي

$$\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x) = hy + \mathbf{r}(h), \qquad (١١)$$

حيث أن $\mathbf{r}(h)/h \to 0$ عندما $h \to 0$. إن الحد الرئيسي في الجهة اليمنى من (١١) هو أيضاً دالة خطية لـ h. كل $y \in \mathbf{R}^m$ ينتج تحويلاً خطياً لـ $\mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^m$، وذلك بمصاحبة المتجه $hy \in \mathbf{R}^m$. لكل $h \in \mathbf{R}^1$ إن هذا التطابق لـ $\mathbf{R}^m$ مع $L(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^m)$ يتيح لنا اعتبار $\mathbf{f}'(x)$ عنصراً من عناصر $L(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^m)$.

لذلك فإنه إذا كانت $\mathbf{f}$ تطبيقاً قابلاً للتفاضل لـ $(a,b) \subset \mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^m$ وإذا كانت $x \in (a,b)$، فإن $\mathbf{f}'(x)$ تكون تحويلاً خطياً لـ $\mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^m$ والذي يحقق

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}'(x)h}{h} = 0 \;, \qquad (١٢)$$

أو ما يكافئ

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}'(x)h|}{|h|} = 0 \;. \qquad (١٣)$$

نحن الآن مستعدون للحالة التي تكون فيها $n > 1$.

٩، ١١ تعريف: أفترض أن E مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^n$، $\mathbf{f}$ تطبيق E في $\mathbf{R}^m$، و $\mathbf{x} \in E$. إذا كان يوجد هنالك تحويلاً خطياً A لـ $\mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$ بحيث أن

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0, \qquad (١٤)$$

عندها فأننا نقول أن $\mathbf{f}$ *قابلة للتفاضل عند* $\mathbf{x}$ ***differentiable at x*** وتكتب

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A. \qquad (١٥)$$

إذا كانت $\mathbf{f}$ قابلة للتفاضل عند كل $\mathbf{x} \in E$ فإننا نقول أن $\mathbf{f}$ ***قابلة للتفاضل في*** E ***differentiable in***.

بالطبع فإنه يفهم من (١٤) بأن $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$. إذا كانت $|\mathbf{h}|$ صغيرة بما فيه الكفاية، فإن $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in E$، نظراً لأن E مفتوحة. لذلك فإن $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ تكون معرفة، $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \in \mathbf{R}^m$، ونظراً لأن $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$، $A\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$. فإن

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m.$$

إن معيار البسط في (١٤) هو معيار $\mathbf{R}^m$، وفي المقام لدينا المعيار- $\mathbf{R}^n$ لـ $\mathbf{h}$ $\mathbf{R}^n$-norm of $\mathbf{h}$.

يوجد هنالك مشكلة واضحة بخصوص الوحدانية يتوجب علينا حلها قبل أن نخطو أية خطوة إضافية في هذا المجال.

٩، ١٢ مبرهنة: *افترض أن E و $\mathbf{f}$ هما كما وردا في التعريف ٩، ١١، وأن $\mathbf{x} \in E$، وأن (١٤) تتحقق بوضع $A = A_1$ و $A = A_2$ عندها فإن $A_1 = A_2$.*

البرهان: إذا كانت $B = A_1 - A_2$، فإن المتباينة

$$|B\mathbf{h}| \le |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_1\mathbf{h}| + |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A_2\mathbf{h}|$$

تبين بأن $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}| \to 0$ عندما $\mathbf{h} \to 0$. بالنسبة إلى $\mathbf{h} \ne 0$ الثابتة نستنتج أن

$$\frac{|B(t\mathbf{h})|}{|t\mathbf{h}|} \to 0 \qquad t \to 0. \qquad (١٦)$$

تبين خطية B بأن الجانب الأيسر من (١٦) يكون مستقلاً بالنسبة إلى t.

إذن $B\mathbf{h} = 0$ لكل $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$. إذن $B = 0$.

٩، ١٣ ملاحظات:

(أ) يمكن إعادة كتابة العلاقة (١٤) بالشكل

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}) \qquad (١٧)$$

حيث أن المتبقي $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ يحقق

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0. \qquad (١٨)$$

قد نفسر (١٧)، كما في البند ٩، ١٠، بالقول أنه بالنسبة إلى $\mathbf{x}$ الثابتة و $\mathbf{h}$ الصغيرة، فإن

الجانب الأيسر من (١٧) يكون مساوياً تقريباً إلى $f'(x)h$، أي إلى قيمة التحويل الخطي المطبق على h.

(ب) أفترض أن f و E كما وردا في التعريف، وإن f قابلة للتفاضل في. لكل $x \in E$، فإن $f'(x)$ تكون عندها دالة، وعلى وجه التحديد، تحويل خطي لـ R^n في R^m. لكن f' هي أيضاً تطبيق E في $L(R^n, R^m)$.

(ج) إن نظرة سريعة على (١٧) تبين أن f تكون مستمرة عند أي نقطة تكون فيها f قابلة للتفاضل.

(د) غالباً ما نطلق على المشتقة المعرفة في (١٤) أو (١٧) بـ *التفاضلي* ***differential*** لـ f عند x، أو *المشتقة الكلية* ***total derivative*** لـ f عند x، لتفريقها عن المشتقة الجزئية التي ستحدث فيما بعد.

٩، ١٤ مثال: قمنا بتعريف مشتقات الدوال التي تحمل R^n إلى R^m بأنها تحويلات خطية لـ R^n في R^m. ما هي المشتقة لتحويل خطي كهذا ؟ الجواب بسيط جداً.

إذا كانت $A \in L(R^n, R^m)$ وإذا كانت $x \in R^n$، فإن

$$A'(x) = A \quad .$$

لاحظ بأن x تظهر في الجانب الأيسر من (١٩)، ولكن ليس في الجانب الأيمن. كلا من جانبي (١٩) هما عناصر لـ $L(R^n, R^m)$، بينما $Ax \in R^m$.

إن برهنة (١٩) بسيطة جداً، نظراً لأن

$$A(x+h) - Ax = Ah \qquad (٢٠)$$

استناداً إلى خطية A. بالنسبة إلى $f(x) = Ax$، فإن بسط (١٤) يساوي 0 لكل $h \in R^n$. في (١٧)، $r(h) = 0$.

نقوم الآن بتوسيع قاعدة التابع (المبرهنة ٥، ٥) لغاية المرحلة الراهنة.

٩، ١٥ مبرهنة *لنفترض إن E مجموعة مفتوحة في R^n، f تطبيق E في R^m، f قابلة للتفاضل عند $x_0 \in E$، g تطبيق المجموعة المفتوحة التي تحتوي على $f(E)$ في R^k، و g قابلة للتفاضل عند $f(x_0)$. عندها فإن التطبيق F لـ E في R^k المعرف بـ*

$$F(x) = g(f(x))$$

يكون قابلاً للتفاضل عند $\mathbf{x}_0$، و

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0). \tag{٢١}$$

في الجانب الأيمن من (٢١)، لدينا حاصل ضرب تحويليين خطيين، كما معرف في القسم ٩، ٦.

البرهان: ضع $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$، $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0), B = \mathbf{g}'(\mathbf{y}_0)$، وعرف

$$\mathbf{u}(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h},$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B\mathbf{k},$$

بالنسبة إلى جميع $\mathbf{h} \in \mathsf{R}^n$ و $\mathbf{k} \in \mathsf{R}^m$ والتي يكون عندها $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ و $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k})$ معرفان. عندها فإن

$$|\mathbf{u}(\mathbf{h})| = \varepsilon(\mathbf{h})|\mathbf{h}|, \qquad |\mathbf{v}(\mathbf{k})| = \eta(\mathbf{k})|\mathbf{k}|, \tag{٢٢}$$

حيث أن $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ عندما $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ و $\eta(\mathbf{k}) \to 0$ عندما $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$.

لنأخذ $\mathbf{h}$، ضع $\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. عندها فإن

$$|\mathbf{k}| = |A\mathbf{h} + \mathbf{u}(\mathbf{h})| \le [\|A\| + \varepsilon(\mathbf{h})]|\mathbf{h}|, \tag{٢٣}$$

و

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA\mathbf{h} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - BA\mathbf{h} \\ &= B(\mathbf{k} - A\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k}) \\ &= B\mathbf{u}(\mathbf{h}) + \mathbf{v}(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

إذن (٢٢) و (٢٣) تؤدي، بالنسبة إلى $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$، إلى أن

$$\frac{|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - BA\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \le \|B\|\varepsilon(\mathbf{h}) + [\|A\| + \varepsilon(\mathbf{h})]\eta(\mathbf{k}).$$

لندع $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. عندها فإن $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$. وكذلك، $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$، استناداً إلى (٢٣)، لذلك فإن $\eta(\mathbf{k}) \to 0$. يؤدي ذلك إلى أن $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0) = BA$. وهذا ما تؤكده (٢١).

٩، ١٦ المشتقات الجزئية Partial Derivatives

مرة أُخرى نلاحظ الدالة $\mathbf{f}$ التي تطبق المجموعة المفتوحة $E \subset \mathsf{R}^n$ في R^m. ليكن $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ و $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ الأساسان القياسيان لـ R^n و R^m. إن مكونات $\mathbf{f}$ هي الدوال الحقيقية $f_1, \dots, f_m$ المعرفة بـ

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \qquad (\mathbf{x} \in E), \tag{٢٤}$$

أو، بصورة مكافئة، بـ $f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{u}_i$ $\quad 1 \le i \le m$.

بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in E$، $1 \le i \le m$، $1 \le j \le n$، نعرف

$$(D_j f_i)(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t}, \tag{٢٥}$$

شريطة إن تكون الغاية موجودة. بكتابة $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ بدلاً من $f_i(\mathbf{x})$ نلاحظ بأن $D_j f_i$ هو مشتقة f_i بالاستناد إلى x_j، وذلك بوضع المتغيرات الأخرى ثابتة. لذلك يستخدم الرمز

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{٢٦}$$

غالباً بدلاً من $D_j f_i$، و تسمى $D_j f_i$ *المشتقة الجزئية* ***partial derivative***.

في حالات متعددة يكون وجود المشتقة كافياً عند التعامل مع الدوال ذات المتغير الواحد، بينما تكون الاستمرارية أو على الأقل تقييد المشتقات الجزئية مهمة في التعامل مع الدوال ذات المتغيرات المتعددة. على سبيل المثال فإن الدالتين f و g المذكورة في التمرين ٧، الفصل الرابع، ليستا مستمرتين، على الرغم من وجود مشتقيهما الجزئيتين عند كل نقطة من نقاط $\mathbf{R}^2$. حتى في حالة الدوال المستمرة، فإن وجود جميع المشتقات الجزئية لا يضمن القابلية على التفاضل بمعناها المذكور في التعريف ٩، ١١، راجع التمرينين ٦ و ١٤، والمبرهنة ٩، ٢١.

على الرغم من ذلك فإنه إذا كان معلوماً أن الدالة $\mathbf{f}$ قابلة للتفاضل عند النقطة $\mathbf{x}$ فإن مشتقاتها الجزئية تكون موجودة عند $\mathbf{x}$، وهم يحددون التحويل الخطي $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ بصورة كاملة:

٩، ١٧ مبرهنة: *لنفترض أن $\mathbf{f}$ تطبيق المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$، و $\mathbf{f}$ قابلة للتفاضل في النقطة $\mathbf{x} \in E$. عندها فإن المشتقات الجزئية $\left(D_j f_i\right)(\mathbf{x})$ تكون موجودة، و*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \left(D_j f_i\right)(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \qquad (1 \le j \le n). \tag{٢٧}$$

هنا، كما في البند ٩، ١٦ ، $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ و $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ هما الأساسان القياسيان لـ $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{R}^m$.

البرهان: قم بتثبيت j. بما أن $\mathbf{f}$ قابلة للتفاضل عند $\mathbf{x}$،

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})(t\mathbf{e}_j) + \mathbf{r}(t\mathbf{e}_j)$$

حيث $|\mathbf{r}(t\mathbf{e})|/t \to 0$ عندما $t \to 0$. لذلك فإن خطية $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ تبين أن

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \tag{٢٨}$$

إذا قمنا الآن بتقديم f بحدود مكوناتها، كما في (٢٤)، فإن (٢٨) ستصبح

$$\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}\mathbf{u}_i=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \tag{٢٩}$$

يؤدي ذلك إلى أن كل خارج قسمة في هذا المجموع يمتلك غاية عندما $t\to 0$ (راجع المبرهنة ٤، ١٠)، لذلك فإن كل $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ يكون موجوداً، وعندها فإن (٢٧) تستنتج من (٢٩).

نقدم الآن بعض النتائج للمبرهنة ٩، ١٧:

لتكن $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$ المصفوفة التي تمثل $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ بالاستناد إلى أساسنا القياسي، كما في البند ٩، ٩.

عندها فإن $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ هي العمود المتجه الـ jth لـ $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$، وذلك تبين (٢٧) بأن العدد $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ يحتل تلك النقطة في الصف الـ ith والعمود الـ jth من $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$. لذلك فإن

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]=\begin{bmatrix}(D_1f_1)(\mathbf{x}) & \dots & (D_nf_1)(\mathbf{x})\\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ (D_1f_m)(\mathbf{x}) & \dots & (D_nf_m)(\mathbf{x})\end{bmatrix}.$$

إذا كانت $\mathbf{h}=\sum h_j\mathbf{e}_j$ أي متجه في $\mathbf{R}^n$، فإن (٢٧) تؤدي إلى أن

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(D_jf_i)(\mathbf{x})h_j\right\}\mathbf{u}_i. \tag{٣٠}$$

٩، ١٨: مثال لتكن γ تطبيق قابلاً للتفاضل للقطعة $(a,b)\subset\mathbf{R}^1$ في المجموعة $E\subset\mathbf{R}^n$، بكلمة أخرى، إن γ منحنياً قابلاً للتفاضل في E. لتكن f دالة بقيم حقيقية قابلة للتفاضل بمنطلق E. لذلك فإن f تطبيقاً قابلاً للتفاضل لـ E في $\mathbf{R}^1$. عرف

$$g(t)=f(\gamma(t))\qquad (a<t<b). \tag{٣١}$$

عندها فإن قاعدة التتابع (السلسلة) rule chain تؤكد بأن

$$g'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)\qquad (a<t<b). \tag{٣٢}$$

بما أن $\gamma'(t)\in L(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^n)$ و $f'(\gamma(t))\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1)$، فإن (٣٢) تعرف $g'(t)$ كمؤثر خطي في $\mathbf{R}^1$ إن هذا يتفق مع كون g تطبيق (a,b) في $\mathbf{R}^1$. على الرغم من ذلك، من الممكن

اعتبار $g'(t)$ عدداً حقيقياً. (تمت مناقشة هذه النقطة في البند ٩، ١٠). من الممكن احتساب هذا العدد بالاستناد إلى المشتقات الجزئية لـ f ومشتقات مكونات γ كما سنلاحظ الآن.

بالاستناد إلى الأساس القياسي $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ لـ $\mathbf{R}^n$، فإن $[\gamma'(t)]$ هي مصفوفة n بـ 1 ("مصفوفة عمودية") التي تمتلك $\gamma_i'(t)$ في الصف ألـ ith، حيث $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ هما مكونات γ. لكل $\mathbf{x}\in E$، $[f'(\mathbf{x})]$ هي المصفوفة 1 بـ n ("مصفوفة صفية") التي تمتلك $(D_j f)(\mathbf{x})$ في العمود ألـ j th. إذن $[g'(t)]$ هي المصفوفة 1 بـ n التي تتكون فقط من العدد الحقيقي

$$g'(t)=\sum_{i=1}^{n}(D_i f)(\gamma(t))\gamma_i'(t)\ . \qquad (٣٣)$$

إن هذه هي الحالة الخاصة التي نجابهها بين فترة وأخرى لقاعدة التتابع. من الممكن إعادة كتابة (٣٣) بالشكل آلاتي.

نرفق لكل $\mathbf{x}\in E$ المتجه، الذي يطلق عليه *الميل* "gradient" لـ f عند $\mathbf{x}$ المعرف بـ

$$(\nabla f)(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(D_i f)(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\ . \qquad (٣٤)$$

بما أن

$$\gamma'(t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i'(t)\mathbf{e}_i \qquad (٣٥)$$

فإنه من الممكن إعادة كتابة (٣٣) بالشكل آلاتي

$$g'(t)=(\nabla f)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) \qquad (٣٦)$$

الجداء الغير متجه للمتجهين $(\nabla f)(\gamma(t))$ و $\gamma'(t)$.

لنقم الآن بتثبيت واحداً من ألـ $\mathbf{x}\in E$، لتكن $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n$ متجه الوحدة (أي أن $|\mathbf{u}|=1$)، ونخصص γ بحيث إن

$$\gamma(t)=\mathbf{x}+t\mathbf{u} \qquad (-\infty<t<\infty) \qquad (٣٧)$$

عندها فإن $\gamma'(t)=\mathbf{u}$ لكل t. إذن تبين (٣٦) بأن

$$g'(0)=(\nabla f)(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} \qquad (٣٨)$$

ومن جهة أخرى، تبين (٣٧) بأن

$$g(t) - g(0) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})$$

إذن (٣٨) تعطي

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \qquad (٣٩)$$

غالباً ما يطلق على الغاية في (٣٩) *المشتقة التوجيهية* ***directional derivative*** لـ f عند $\mathbf{x}$، باتجاه الوحدة $\mathbf{u}$، وقد يرمز لها بالرمز $(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})$.

إذا تم تثبيت f و $\mathbf{x}$، ولكن $\mathbf{u}$ تتغير، فإن (٣٩) تبين إن $(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})$ تصل إلى قيمتها القصوى عندما تكون $\mathbf{u}$ مضاعف موجب غير متجه لـ $(\nabla f)(\mathbf{x})$ [يجب أن نستثني هنا الحالة التي تكون فيها $(\nabla f)(x) = 0$].

إذا كانت $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i$ فإن (٣٩) تبين أنه بالإمكان التعبير عن $(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})$ بالاستناد إلى المشتقات الجزئية لـ f عند $\mathbf{x}$ بالصيغة

$$(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x}) u_i \qquad (٤٠)$$

قسماً من هذه الأفكار سوف تلعب دوراً في المبرهنة الآتية.

٩، ١٩ مبرهنة: *لنفترض إن* $\mathbf{f}$ *تطبيق المجموعة المفتوحة المحدبة* $E \subset \mathbf{R}^n$ *في* $\mathbf{R}^m$، $\mathbf{f}$ *قابلة لتفاضل في* E، *ويوجد هنالك عدداً حقيقياً* M *بحيث إن*

$$\|\mathbf{f}'(x)\| \le M$$

لكل $\mathbf{x} \in E$. *فإن*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| \le M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

لجميع $\mathbf{b} \in E, \mathbf{a} \in E$.

البرهان: تم تثبيت $\mathbf{b} \in E, \mathbf{a} \in E$. عرف

$$\gamma(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

لجميع $t \in \mathbf{R}^1$ بحيث إن $\gamma(t) \in E$. بما أن E محدبة، $\gamma(t) \in E$ إذا كانت $0 \le t \le 1$. ضع

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\gamma(t))$$

فإن

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\gamma(t))\gamma'(t) = \mathbf{f}'(\gamma(\mathbf{t}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

لذلك فإن

$$|\mathbf{g}'(t)| \le \|\mathbf{f}'(\gamma(t))\| \, |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \le M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

لجميع $t \in [0,1]$. استناداً إلى المبرهنة ٥، ١٩،

$$|\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0)| \le M|\mathbf{b} - \mathbf{a}| \ .$$

ولكن $\mathbf{g}(0) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ و $\mathbf{g}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$. هذا ينهي البرهان.

نتيجة: *إضافة لذلك، إذا كانت* $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 0$ *لجميع* $\mathbf{x} \in E$*، فإن* $\mathbf{f}$ *ثابتة.*

البرهان: لبرهنة ذلك، لاحظ بأن فرضيات المبرهنة تتحقق ا لآن عندما تكون $M = 0$.

٩، ٢٠ تعريف يقال على التطبيق القابل للتفاضل $\mathbf{f}$ للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$ بأنه قابل للتفاضل ومشتقاته مستمرة في *E* ***continuously in differentiable E***إذا كانت $\mathbf{f}'$ تطبيقاً مستمراً لــ E في $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

بصورة اكثر وضوحاً، المطلوب أن يوجد لكل $\mathbf{x} \in E$ ولكل $\varepsilon > 0$ مناظر له $\delta > 0$ بحيث أن

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| < \varepsilon$$

إذا كانت $\mathbf{y} \in E$ و $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$.

إذا كان الأمر كذلك، فإننا نقول أيضاً بأن $\mathbf{f}$ تطبيقاً- $\mathcal{C}'$ ، أو أن $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(E)$.

٩، ٢١ مبرهنة: *لنفترض أن* $\mathbf{f}$ *تطبيق المجموعة المفتوحة* $E \in \mathbf{R}^n$ *في* $\mathbf{R}^m$. *عندها فإن* $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(E)$ *إذا وإذا فقط كانت المشتقات الجزئية* $D_j f_i$ *موجودة ومستمرة في* E *بالنسبة إلى* $1 \le i \le m$، $1 \le j \le n$.

البرهان: لنفترض أولاً أن $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(\mathrm{E})$. استناداً إلى (٢٧)،

$$\left(D_j f_i\right)(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j\right) \cdot \mathbf{u}_i$$

لجميع i, j، ولجميع $\mathbf{x} \in E$. إذن

$$\left(D_j f_i\right)(\mathbf{y}) - \left(D_j f_i\right)(\mathbf{x}) = \left\{\left[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\right]\mathbf{e}_j\right\} \cdot \mathbf{u}_i$$

وبما أن $|\mathbf{u}_i| = |\mathbf{e}_j| = 1$، فإن ذلك يؤدي إلى

$$\left|\left(D_j f_i\right)(\mathbf{y}) - (D_j f_i)(\mathbf{x})\right| \le \left|\left[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\right]\mathbf{e}_j\right|$$
$$\le \|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\|$$

إذن $D_j f_i$ مستمرة.

بالنسبة إلى العكس، يكفي أن تلاحظ الحالة التي تكون فيها $m = 1$. (لماذا ؟). قم بتثبيت $\mathbf{x} \in E$ و $\varepsilon > 0$. بما أن E مفتوحة، يوجد هنالك كرة مفتوحة $S \subset E$، التي مركزها عند $\mathbf{x}$ ونصف قطرها r، وتبين استمرارية الدوال $D_j f$ بأنه من الممكن اختيار r بحيث أن

$$\left|\left(D_j f\right)(\mathbf{y}) - \left(D_j f\right)(\mathbf{x})\right| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (\mathbf{y} \in S, 1 \le j \le n) \ . \qquad (٤١)$$

أفترض أن $\mathbf{h} = \sum h_j \mathbf{e}_j$، $|\mathbf{h}| < r$، ضع $\mathbf{v}_0 = 0$، و $\mathbf{v} = h_1\mathbf{e}_1 + \cdots + h_k\mathbf{e}_k$، بالنسبة إلى $1 \le k \le n$. عندها فإن

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n}\left[f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_j) - f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1})\right] . \qquad (٤٢)$$

بما أن $|\mathbf{v}_k| < r$ بالنسبة إلى $1 \le k \le n$ وبما أن S محدبة، فإن القطع ذات نقاط النهاية $\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}$ و $\mathbf{x}+\mathbf{v}_j$ تقع في S. بما أن $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1} + h_j\mathbf{e}_j$، فإن مبرهنة القيمة الوسطية (٥، ١٠) تبين بأن المجموع الـ jth في (٤٢) يكون مساوياً إلى

$$h_j\left(D_j f\right)(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1} + \theta_j h_j \mathbf{e}_j)$$

بالنسبة إلى بعض $\theta_j \in (0,1)$، وهذا يختلف عن $h_j\left(D_j f\right)(\mathbf{x})$ بأقل من $|h_j|\varepsilon/n$، باستخدام (٤١). استناداً إلى (٤٢)، فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$\left|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j\left(D_j f\right)(\mathbf{x})\right| \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|h_j|\varepsilon \le |\mathbf{h}|\varepsilon$$

بالنسبة إلى جميع $\mathbf{h}$ بحيث أن $|\mathbf{h}| < r$.

إن هذا يفيد بأن f قابلة للتفاضل عند $\mathbf{x}$ وأن $f'(\mathbf{x})$ هي الدالة الخطية التي تعين العدد $\sum h_j\left(D_j f\right)(\mathbf{x})$ للمتجه $\mathbf{h} = \sum h_j \mathbf{e}_j$. تتألف المصفوفة $[f'(\mathbf{x})]$ من الصف $\left(D_1 f\right)(\mathbf{x}), \ldots, \left(D_n f\right)(\mathbf{x})$ ؛ وبما أن $D_1 f, \ldots, D_n f$ دوالاً مستمرة في E، فإن الملاحظات الختامية للبند ٩، ٩ تبين أن $f \in \mathscr{C}'(E)$.

مبدأ الانكماش "التقلص" The Contraction Principle

نقوم الآن بمقاطعة نقاشنا حول التفاضل لندرج مبرهنة النقطة الصامدة (الثابتة) التي تكون نافذة المفعول في الفضاءآت المترية التامة العشوائية. سوف نستخدم هذه المبرهنة في برهنة مبرهنة الدالة العكسية.

٩، ٢٢ تعريف: لتكن X فضاءاً بالقياس المتري d. إذا كانت φ تطبيق X في X وإذا كان يوجد هنالك العدد $c<1$ بحيث أن

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \le cd(x,y) \qquad (٤٣)$$

بالنسبة إلى جميع $x,y\in X$ عندها يقال لـــ φ بأنها *تقليص* (*انكماش*) ***contraction*** X في X.

٩، ٢٣ مبرهنة: *إذا كانت X فضاءاً مترياً، وإذا كانت φ تقليص X في X، فإنه يوجد هنالك $x\in X$ واحدة و واحدة فقط، بحيث أن* $\varphi(x)=x$.

بكلمة أخرى، تمتلك φ نقطة صامدة واحدة. إن مسألة الوحدانية عديمة الأهمية، وذلك لأنه إذا كانت $\varphi(x)=x$ و $\varphi(y)=y$، فإن (٤٣) تعطينا $d(x,y)\le cd(x,y)$، والتي تحدث فقط عندما تكون $d(x,y)=0$.

إن مسألة *وجود* ***existence*** نقطة صامدة لـــ φ هي الجزء المهم من المبرهنة وفي الحقيقية فإن البرهان يقدم لنا طريقة بناءه لتحديد موقع النقطة الصامدة.

البرهان: أختار $x_0\in X$ عشوائياً، وعرف $\{x_n\}$، بوضع

$$x_{n+1}=\varphi(x_n) \qquad (n=0,1,2,\ldots). \qquad (٤٤)$$

أختار $c<1$ بحيث أن (٤٣) تتحقق. بالنسبة إلى $n\ge 1$ فإن لدينا

$$d(x_{n+1},x_n)=d(\varphi(x_n),\varphi(x_{n-1}))\le cd(x_n,x_{n-1}).$$

إذن الاستقراء يعطي

$$d(x_{n+1},x_n)\le c^n d(x_1,x_0) \qquad (n=0,1,2,\ldots)\ . \qquad (٤٥)$$

إذا كانت $n<m$، فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\le \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i,x_{i-1}) \\ &\le (c^n+c^{n+1}+\cdots+c^{m-1})d(x_1,x_0). \\ &\le \left[(1-c)^{-1}d(x_1,x_0)\right]c^n. \end{aligned}$$

لذلك فإن $\{x_n\}$ متتالية كوشية. بما أن X تام فإن $\lim x_n = x$ لبعض $x\in X$.

بما أن φ تقليصاً (انكماشاً)، فإن φ مستمرة (وفي الحقيقة مستمرة بانتظام) في X. إذن

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

مبرهنة الدالة العكسية The Inverse Function Theorem

تنص مبرهنة الدالة العكسية بشكل تقريبي، على أن التطبيق القابل للتفاضل والتي مشتقاها مستمرة f يكون قابلاً للعكس في الجوار لأي نقطة x يكون عندها التحويل الخطي $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ قابلاً للعكس:

٩، ٢٤ مبرهنة: *لنفترض أن f تطبيقاً – C' للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^n$.* *$\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ قابلة للعكس لبعض $\mathbf{a} \in E$، و $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. عندها فإن*

(أ) *يوجد هنالك مجموعتين U و V في $\mathbf{R}^n$ بحيث إن $\mathbf{a} \in U, \mathbf{b} \in V$، f تكون واحد – لـ – واحد في U، $\mathbf{f}(U) = V$ ؛*

(ب) *إذا كانت g معكوس f [التي تكون موجودة استناداً إلى (أ)]، المعرفة في V بـ*

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in U),$$

فإن $\mathbf{g} \in C'(V)$.

بكتابة المعادلة $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ بشكل المكونات، فإننا نصل إلى التعبير الآتي لاستنتاج المبرهنة: بالإمكان حل النظام المعادلات النونية التالية

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (1 \le i \le n)$$

بالنسبة $x_1, \dots, x_n$ بحدود $y_1, \dots, y_n$ إذا حددنا x و y إلى مناطق مجاورة صغيرة بما فيه الكفاية لـ a و b ؛ فإن الحلول تكون وحيدة وقابلة للتفاضل باستمرار.

البرهان:

(أ) ضع $\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = A$، واختار λ بحيث أن

$$2\lambda \|A^{-1}\| = 1 \ . \tag{٤٦}$$

بما أن $\mathbf{f}'$ مستمرة عند a، يوجد هنالك كرة مفتوحة $U \subset E$، يكون مركزها عند a، بحيث أن

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - A\| < \lambda \qquad (\mathbf{x} \in U). \tag{٤٧}$$

نرفق لكل $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ الدالة φ، المعرفة بـ

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{٤٨}$$

لاحظ بأن $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ إذا و إذا فقط كانت x نقطة صامدة لـ φ.

بما أن $\varphi'(\mathbf{x}) = I - A^{-1}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A^{-1}(A - \mathbf{f}'(\mathbf{x}))$، فإن (٤٦) و (٤٧) تؤدي إلى أن

$$\|\varphi'(\mathbf{x})\| < \tfrac{1}{2} \qquad (\mathbf{x} \in U) \ . \tag{٤٩}$$

إذن

$$|\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \le \tfrac{1}{2}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \qquad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U). \tag{٥٠}$$

استناداً إلى المبرهنة ٩، ١٩. يؤدي ذلك إلى أن φ تمتلك على الأكثر نقطة صامدة واحدة في U بحيث أن $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ لـــ $\mathbf{x} \in U$ واحد على الأكثر.

لذلك فإن $\mathbf{f}$ تكون 1 - 1 في U.

الخطوة التالية، ضع $V = \mathbf{f}(U)$، واختار $\mathbf{y}_0 \in V$. عندها فإن $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ لبعض $\mathbf{x}_0 \in U$. لتكن B كرة مفتوحة بمركز عند $\mathbf{x}_0$ ونصف قطر $r > 0$، والتي هي من الصغر بحيث أن انغلاقها $\overline{B}$ يقع في U. سوف نبين أن $\mathbf{y} \in V$ كلما كانت $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$. وهذا يبرهن، بالطبع أن، V مفتوحة.

قم بتثبيت $\mathbf{y}$، $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$. ونأخذ φ كما معرفة في (٤٨)،

$$|\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| = |A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)| < \|A^{-1}\|\lambda r = \frac{r}{2}.$$

إذا كانت $\mathbf{x} \in \overline{B}$، فإننا نستنتج من (٥٠) بأن

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \le |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)| + |\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0|$$
$$< \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \frac{r}{2} \le r;$$

إذن $\varphi(\mathbf{x}) \in B$. لاحظ بأن (٥٠) تتحقق إذا كانت $\mathbf{x}_2 \in \overline{B}, \mathbf{x}_1 \in \overline{B}$.

لذلك فإن φ هي تقليص (انكماش) $\overline{B}$ في $\overline{B}$. ونظراً لكونها مجموعة جزئية مغلقة لـــ $\mathbf{R}^n$، فإن $\overline{B}$ تكون تامة. لذلك تؤدي المبرهنة ٩، ٢٣ إلى أن φ تمتلك نقطة صامدة $\mathbf{x} \in \overline{B}$. بالنسبة إلى هذه الـــ $\mathbf{x}$، $f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$. لذلك فإن $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(\overline{B}) \subset \mathbf{f}(U) = V$.

إن هذا يبرهن الجزء (أ) من المبرهنة.

(ب) نختار $\mathbf{y} \in V$، $\mathbf{y} + \mathbf{k} \in V$. عندها يوجد هنالك $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in U, \mathbf{x} \in U$، بحيث أن $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$، $\mathbf{y} + \mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$. ويأخذ φ كما معرفة في (٤٨)،

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{h} + A^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h})] = \mathbf{h} - A^{-1}\mathbf{k}.$$

استناداً (٥٠)، $|\mathbf{h} - A^{-1}\mathbf{k}| \le \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$. إذن $|A^{-1}\mathbf{k}| \ge \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$، و

$$|\mathbf{h}| \le 2\|A^{-1}\||\mathbf{k}| = \lambda^{-1}|\mathbf{k}| \;. \qquad (٥١)$$

استناداً إلى (٤٦)، (٤٧)، والمبرهنة ٩، ٨، فإن $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ تمتلك معكوساً، لنقل T. بما أن

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T\mathbf{k} = \mathbf{h} - T\mathbf{k} = -T\,[\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}]\,,$$

فإن (٥١) تؤدي إلى أن

$$\frac{|\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} \le \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{\mathbf{h}}.$$

عندما $\mathbf{k} \to 0$، تبين (٥١) بأن $\mathbf{h} \to 0$. لذلك يميل الجانب الأيمن من المتباينة الأخيرة إلى 0.

إذن يصح نفس الشيء بالنسبة إلى الجانب الأيسر. نكون بهذا قد برهنا بأن $\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = T$. ولكن T كانت قد اختيرت لتكون معكوس $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$. لذلك فإن

$$\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\}^{-1} \qquad (\mathbf{y} \in V). \qquad (٥٢)$$

أخيرا، لاحظ بأن $\mathbf{g}$ هي تطبيقاً مستمراً لـ V في U (نظراً لأن $\mathbf{g}$ قابلة للتفاضل). وأن $\mathbf{f}'$ هي تطبيقاً مستمراً لـ U في Ω التي تضم جميع العناصر القابلة للعكس لـ $L(\mathbf{R}^n)$، وأن هذا المعكوس هو تطبيقاً مستمراً لـ Ω في Ω، استناداً إلى البرهنة ٩، ٨. إذا قمنا بربط هذه الحقائق مع (٥٢)، فإننا نلاحظ أن $\mathbf{g} \in C'(V)$.

وهذا ينهي البرهان.

ملاحظة:

استخدمت القوة الكاملة للافتراض $f \in C'(E)$ في الفقرة الأخيرة فقط من البرهان السابق. فيما عدا ذلك، ولغاية المعادلة (٥٢)، فقد تم الاشتقاق استناداً إلى وجود $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in E$، قابلة العكس لـ $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$، واستمرارية $\mathbf{f}'$ عند النقطة $\mathbf{a}$ بالذات. في هذا المجال نشير إلى مقالة إي. نجينوس في مجلة الرياضيات الأمريكية الشهرية، المجلد ٨١، ١٩٧٤، الصفحات ٩٦٩ - ٩٨٠.

نقدم أدناه نتيجة مباشرة للجزء (أ) من مبرهنة الدالة العكسية.

٩، ٢٥ مبرهنة: *إذا كانت f تطبيقاً -* C' *للمجموعة المفتوحة* $E \subset \mathbf{R}^n$ *في* $\mathbf{R}^n$ *وإذا*

كانت $\mathbf{f}'(x)$ قابلة للعكس لكل $\mathbf{x} \in E$، فإن $\mathbf{f}(W)$ مجموعة جزئية مفتوحة لـ $\mathbf{R}^n$ لكل مجموعة مفتوحة $W \subset E$. بكلمة أخرى، فإن f تطبيقاً مفتوحاً لـ E في $\mathbf{R}^n$.

إن الافتراضات الموضوعة في هذه المبرهنة تضمن إن لكل نقطة $\mathbf{x} \in E$ تمتلك جواراً تكون فيها f هي1-1. من الممكن التعبير عن ذلك بالقول إن f واحد–لـ– واحد *محلياً* *locally* في E. ولكن f لا تحتاج لأن تكون 1-1في E تحت هذه الظروف كمثال على ذلك، راجع التمرين ١٧.

مبرهنة الدالة الضمنية The Implicit Function Theorem

إذا كانت f دالة حقيقية قابلة للتفاضل ومشتقتها مستمرة في المستوي، فإنه بالإمكان حل المعادلة $f(x,y)=0$ بالنسبة إلى y بحدود x في الجوار لأي نقطة (a,b) يكون فيها $f(a,b)=0$ و $\partial f/\partial y \neq 0$. وبالمقابل بالإمكان حل y بحدود x قرب (a,b) إذا كانت $\partial f/\partial x \neq 0$ عند (a,b). وكمثال بسيط لتوضيح الحاجة إلى الافتراض $\partial f/\partial y \neq 0$، لاحظ $f(x,y)=x^2+y^2-1$.

إن العبارة السابقة هي ابسط حالة (الحالة $m=n=1$ للمبرهنة ٩، ٢٨) لما يسمى "مبرهنة الدالة الضمنية" إن برهانها يعتمد اعتماداً كبيراً على حقيقية إن التحويلات القابلة للتفاضل ومشتقتها مستمرة تتصرف محلياً بطريقة مشابهة جداً لمشتقاتها. لذلك، سنقوم أولاً ببرهنة المبرهنة ٩، ٢٧، النسخة الخطية للمبرهنة ٩، ٢٨.

٩، ٢٦ ملاحظة: إذا كانت $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbf{R}^m$، لنكتب $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ بالنسبة للنقطة (أو المتجه)

$$(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)\in\mathbf{R}^{n+m}\ .$$

فيما سنقدم، سيكون المدخول الأول في $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ أو في رمز مشابه دائماً متجهاً في $\mathbf{R}^n$، والثاني متجهاً في $\mathbf{R}^m$.

بالإمكان فصل كل $A\in L(\mathbf{R}^{n+m},\mathbf{R}^n)$ إلى التحويليين الخطيين A_x و A_y المعرفين بـ

$$A_y\mathbf{k}=A(0,\mathbf{k}) \qquad A_x\mathbf{h}=A(\mathbf{h},0) \qquad (٥٣)$$

بالنسبة إلى أي $\mathbf{h}\in\mathbf{R}^n$، $\mathbf{k}\in\mathbf{R}^m$. عندها فإن $A_x\in L(\mathbf{R}^n)$ ، $A_y\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^n)$، و

$$A(\mathbf{h},\mathbf{k}) = A_x\mathbf{h} + A_y\mathbf{k}. \qquad (٥٤)$$

إن النسخة الخطية لمبرهنة الدالة الضمنية هي الآن واضحة تقريباً.

٩، ٢٧ مبرهنة: *إذا كانت $A \in L(\mathbf{R}^{n+m},\mathbf{R}^n)$، وإذا كانت A_x قابلة للعكس، إذن يوجد هنالك لكل $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^m$ ، $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ وحيد بحيث أن $A(\mathbf{h},\mathbf{k}) = 0$. بالإمكان احتساب هذا الـــ h من k بالصيغة الآتية*

$$\mathbf{h} = -(A_x)^{-1} A_y\mathbf{k}. \qquad (٥٥)$$

البرهان: استناداً إلى (٥٤). فإن $A(\mathbf{h},\mathbf{k}) = 0$ إذا وإذا فقط كانت

$$A_x\mathbf{h} + A_y\mathbf{k} = 0,$$

والتي هي مماثلة إلى (٥٥) عندما تكون A_x قابلة للعكس.

بكلمة أخرى، إن استنتاج المبرهنة ٩، ٢٧، يفيد بأنه بالإمكان حل المعادلة $A(\mathbf{h},\mathbf{k}) = 0$ (بصورة وحيدة) بالنسبة إلى h إذا كانت k معلومة، وأن الحل h هو دالة خطية لـــ k. سوف يلاحظ الأشخاص الذين لديهم إلمام بالجبر الخطي بأن هذه العبارة هي مشابهة جداً لعبارة مماثلة بخصوص نظم المعادلات الخطية.

٩، ٢٨ مبرهنة: *لتكن f تطبيقاً C' للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^{n+m}$ في $\mathbf{R}^n$، بحيث إن $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ لبعض النقاط $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in E$.*

ضع $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ وأفترض أن A_x قابلة للعكس.

عندها يوجد هنالك مجموعتين مفتوحتين $U \subset \mathbf{R}^{n+m}$ و $W \subset \mathbf{R}^m$ بـــ $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in U$ و $\mathbf{b} \in W$، تمتلكان الخاصية الآتية:

لكل $\mathbf{y} \in W$ يوجد هنالك x وحيدة بحيث أن

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U \quad , \quad \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \ . \qquad (٥٦)$$

إذا كانت x معرفة بـــ (g (y، فإن g تطبيقـاً - C' لـــ W في $\mathbf{R}^n$، $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$،

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = 0 \qquad (\mathbf{y} \in W), \qquad (٥٧)$$

و

$$\mathbf{g}'(\mathbf{b}) = -(A_x)^{-1} A_y. \qquad (٥٨)$$

إن الدالة g معرفة "ضمنياً" "implicitly" بـــ (٥٧). وهذا يعلل اسم المبرهنة.

بالإمكان كتابة المعادلة $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ كنظام لـــ n من المعادلات بـــ $n+m$ متغير:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0 \ . \end{aligned} \qquad (٥٩)$$

إن افتراض A_x قابله للعكس يعني إن المصفوفة n بـــ n

$$\begin{bmatrix} D_1f_1 & \cdots & D_nf_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1f_n & \cdots & D_nf_n \end{bmatrix}$$

مقيمة عند (a,b) تعرف مؤثراً خطياً قابلاً للعكس في R^n ؛بكلمة أخرى، فإن متجهاتها العمودية يجب أن تكون مستقلة، أو بصورة مكافئة، يجب أن تكون محددتها لا تساوي صفراً $0 \neq$ determinant (راجع المبرهنة ٩، ٣٦) إضافة لذلك، إذا كانت (٥٩) تتحقق عندما تكون $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ و $\mathbf{y}=\mathbf{b}$، فإن استنتاج المبرهنة هو أنه بالإمكان حل (٥٩) لـــ $x_1,\dots,x_n$ بحدود $y_1,\dots,y_m$ ، لكل $\mathbf{y}$ قريبة من $\mathbf{b}$، وأن هذه الحلول هي دوال قابلة للتفاضل و مشتقتها مستمرة لـــ $\mathbf{y}$.

البرهان: عرف $\mathbf{F}$ بـــ

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}) \qquad ((\mathbf{x},\mathbf{y})\in E). \qquad (٦٠)$$

عندها فإن $\mathbf{F}$ تطبيقـــاً- $\mathscr{C}'$ لـــ E في R^{n+m}، ندعي هنا أن $\mathbf{F}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ هي عنصراً قابلاً للعكس لـــ $L(\mathsf{R}^{n+m})$:

بما أن $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ ، لدينا

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h},\mathbf{b}+\mathbf{k})=A(\mathbf{h},\mathbf{k})+\mathbf{r}(\mathbf{h},\mathbf{k}).$$

حيث أن $\mathbf{r}$ هي المتبقي الذي يحدث في تعريف $\mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$. بما أن

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h},\mathbf{b}+\mathbf{k})-\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= (\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h},\mathbf{b}+\mathbf{k}),\mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{A}(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{k})+(\mathbf{r}(\mathbf{h},\mathbf{k}),0) \end{aligned}$$

يؤدي ذلك إلى أن $\mathbf{F}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ هي المؤثر الخطي في R^{n+m} إلى تطبيق $(\mathbf{h}\ ,\ \mathbf{k})$ إلى $(A(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{k})$. إذا كانت هذه الصورة (التطبيق) المتجه 0، فإن $A(\mathbf{h},\mathbf{k})=0$ و $\mathbf{k}=0$، إذن $A(\mathbf{h},0)=0$ ، وتؤدي المبرهنة ٩، ٢٧ إلى أن $\mathbf{h}=0$ يؤدي ذلك إلى أن $\mathbf{F}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ هي 1 -1 ؛إذن تكون قابلة للعكس (المبرهنة ٩، ٥).

لذلك نستطيع تطبيق تطبيق مبرهنة الدالة العكسية على F. يبين ذلك أنه يوجد هنالك مجموعتين مفتوحتين U و V في $\mathbf{R}^{n+m}$، بـــ $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in U$, $(0,\mathbf{b})\in V$، بحيث أن F هي تطبيق 1-1 لـــ U في V.

لندع W لتكون المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^m$ بحيث أن $(0,\mathbf{y})\in V$ لاحظ بأن $\mathbf{b}\in W$.

من الواضح أن W تكون مفتوحة لأن V مفتوحة.

إذا كانت $\mathbf{y}\in W$، فإن $(0,\mathbf{y})=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ لبعض $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in U$. استناداً إلى (٦٠)، فإن $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ لهذا لـــ $\mathbf{x}$.

افترض، لنفس ألـــ $\mathbf{y}$، إن $(\mathbf{x}',\mathbf{y})\in U$ و $\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{y})=0$. فإن

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}',\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{y}),\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) .$$

بما إن F هي 1-1في U، فإن ذلك يؤدي إلى إن $\mathbf{x}'=\mathbf{x}$.

يبرهن هذا الجزء الأول من المبرهنة.

بالنسبة إلى الجزء الثاني، عرف $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ لـــ $\mathbf{y}\in W$، بحيث إن $(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})\in U$ و (٥٧) تتحقق. عندها فإن

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=(0,\mathbf{y})\qquad(\mathbf{y}\in W) . \tag{٦١}$$

إذا كانت G تطبيق لـــ V في U الذي يعكس F، فإن $\mathbf{G}\in\mathscr{C}'$، استناداً إلى مبرهنة الدالة العكسية، و(٦١) تعطينا

$$(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{G}(0,\mathbf{y})\qquad(\mathbf{y}\in W). \tag{٦٢}$$

بما إن $\mathbf{G}\in\mathscr{C}'$، فإن (٦٢) تبين إن $\mathbf{g}\in\mathscr{C}'$.

أخيراً، لاحتساب $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$، ضع $(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\Phi(\mathbf{y})$. فإن

$$\Phi'(\mathbf{y})\mathbf{k}=(\mathbf{g}'(\mathbf{y})\mathbf{k},\mathbf{k})\qquad(\mathbf{y}\in W,\mathbf{k}\in\mathbf{R}^m) . \tag{٦٣}$$

استناداً إلى (٥٧)، $\mathbf{f}(\Phi(\mathbf{y}))=0$ في W. لذلك تبين قاعدة التتابع بأن

$$\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y}))\Phi'(\mathbf{y})=0$$

عندما $\mathbf{y}=\mathbf{b}$، فإن $\Phi(\mathbf{y})=(\mathbf{a},\mathbf{b})$، و $\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y}))=A$. لذلك فإن

$$A_X\Phi'(\mathbf{b})=0 . \tag{٦٤}$$

نستنتج الآن من (٦٤)، (٦٣)، و (٥٤)، بأن

$$A_x \mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k} + A_y \mathbf{k} = A(\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A\Phi'(\mathbf{b})\mathbf{k} = 0$$

لكل $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^m$. لذلك فإن

$$A_x \mathbf{g}'(\mathbf{b}) + A_y = 0 \; . \qquad (٦٥)$$

يعتبر هذا مكافئاً إلى (٥٨)، وينهي البرهان.

ملاحظة: بحدود مكونات f و g، فإن (٦٥) ستصبح

$$\sum_{j=1}^{n} (D_j f_i)(\mathbf{a},\mathbf{b})(D_k g_j)(\mathbf{b}) = -(D_{n+k} f_i)(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

أو

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \ \mathbf{f}_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial y_k} \right) = - \left(\frac{\partial \ \mathbf{f}_i}{\partial y_k} \right)$$

حيث أن $1 \le i \le n$, $1 \le k \le m$.

بالنسبة إلى كل k، فإن هذا هو نظام من n من المعادلات الخطية التي تكون فيها المشتقات $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$ $(1 \le j \le n)$ غير معلومة.

٩، ٢٩ مثال: لنأخذ $m = 3, n = 2$، ونلاحظ التطبيق $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ لـ $\mathbf{R}^5$ في $\mathbf{R}^2$ المعروض بـ

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3$$
$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3 .$$

إذا كانت $\mathbf{a} = (0,1)$ و $\mathbf{b} = (3,2,7)$، فإن $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.

استناداً إلى الأساس القياسي، فإن مصفوفة التحويل $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ هي

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

إذن

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} , \quad [A_y] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

نلاحظ إن المتجهات العمودية لـ $[A_x]$ تكون مستقلة. أذن فإن A_x قابلة للعكس وتؤكد مبرهنة الدالة الضمنية وجود التطبيق – C' g، المعرف في الجوار لـ (3,2,7)، بحيث إن

$g(3,2,7)=(0,1)$ و $f(g(y),y)=0$.

نستطيع استخدام (٥٨) لاحتساب $g'(3,2,7)$: نظراً لأن

$$\left[(A_x)^{-1}\right]=\left[A_x\right]^{-1}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

(٥٨) تعطينا

$$\left[g'(3,2,7)\right]=-\frac{1}{20}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20}\\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}.$$

بحدود المشتقات الجزئية، فإن الاستنتاج هو إن

$$D_1g_1=\frac{1}{4}\quad D_2g_1=\frac{1}{5}\quad D_3g_1=-\frac{3}{20}$$
$$D_1g_2=-\frac{1}{2}\quad D_2g_2=\frac{6}{5}\quad D_3g_2=\frac{1}{10}$$

عند النقطة $(3,2,7)$.

مبرهنة الرتبة The Rank Theorem

على الرغم من إن هذه المبرهنة ليست بأهمية مبرهنة الدالة العكسية أو مبرهنة الدالة الضمنية، إلا إننا نذكرها هنا كتوضيح ممتع آخر للمبدأ العام الذي يفيد بأن السلوك للتصوير القابل للتفاضل ومشتقتها مستمرة **F** قرب النقطة **x** مشابهة لسلوك التحويل الخطي $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$.

قبل إن نذكر نص المبرهنة، نحتاج إلى بعض الحقائق الأخرى بخصوص التحويلات الخطية.

٩، ٣٠ تعاريف: افترض إن X وY فضائين متجهين، و $A\in L(X,Y)$، كما في التعريف ٩، ٦. إن *فضاء الخمود لـ A null space of*، $\mathcal{N}(A)$، هو مجموعة جميع النقاط $\mathbf{x}\in X$ التي يكون عندها $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. من الواضح إن $\mathcal{N}(A)$ فضاءاً متجهاً في X.

وبنفس الوقت، فإن *مدى A range*، $\mathcal{R}(A)$، فضاءاً متجهاً في Y.

تعرف *رتبة A of rank*، بأنها البعد لـ $\mathcal{R}(A)$.

على سبيل المثال، فإن عناصر $L(\mathbf{R}^n)$ القابلة للعكس هي بالضبط تلك العناصر التي تكون رتبتها n. يستنتج هذا من المبرهنة ٩، ٥.

إذا كانت $A \in L(X,Y)$ و A تمتلك الرتبة 0، فإن $A\mathbf{x} = 0$ لجميع $x \in A$، إذن $\mathscr{N}(A) = X$. راجع التمرين ٢٥ بخصوص هذه النقطة.

٩، ٣١ المساقط Projection: لتكن X فضاءاً متجها. يقال للمؤثر $P \in L(X)$ بأنه ***مسقط projection*** في X إذا كانت $P^2 = P$.

بصورة أكثر وضوح، إن الشرط أن تكون $P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ لكل $\mathbf{x} \in X$. بكلمة أخرى، تحدد P كل متجه في مداها $\mathscr{R}(P)$.

نقدم الآن بعض الخصائص الأولية للمساقط:

(أ) *إذا كانت P مسقطاً في X، فإن كل $\mathbf{x} \in X$ تمتلك تمثيلاً وحيداً على شكل*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

حيث أن $\mathbf{x}_1 \in \mathscr{R}(P)$, $\mathbf{x}_2 \in \mathscr{N}(P)$.

لكي نحصل على هذا التمثيل، ضع $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. عندها فإن $P\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x} - P\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x} - P^2\mathbf{x} = 0$. أما بخصوص الوحدانية، نطبق P على المعادلة $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. بما أن $\mathbf{x}_1 \in \mathscr{R}(P)$, $P\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$ ؛ بما أن $P\mathbf{x}_2 = 0$، يؤدي ذلك إلى أن $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$.

(ب) *إذا كانت X فضاءاً متجهاً منتهي الأبعاد وإذا كانت X_1 فضاءاً متجهاً في X، عندها يوجد هنالك المسقط P في X بحيث $\mathscr{R}(P) = X_1$* .

إذا كانت X_1 تحتوي على 0 فقط، فإن ذلك يعتبر عديم الأهمية: ضع $P\mathbf{x} = 0$ لجميع $\mathbf{x} \in X$.

أفترض أن $\dim X_1 = k > 0$. استناداً إلى المبرهنة ٩، ٣، فإن X تمتلك الأساس $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ بحيث أن $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ أساس X_1. عرف

$$P(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$$

بالنسبة إلى الغير متجهات العشوائية $c_1, \ldots, c_n$.

عندها فإن $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ لكل $\mathbf{x} \in X_1$، و $X_1 = \mathscr{R}(P)$.

لاحظ بأن $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ هي الأساس لـ $\mathscr{N}(\mathbf{P})$. لاحظ أيضاً بأنه يوجد هنالك عدداً غير منتهي من المساقط في X، بمدى X_1، إذا كانت $0 < \dim X_1 < \dim X$.

٩، ٣٢ مبرهنة: *لنفترض إن* m,n,r *أعداداً صحيحة غير سالبة،* $m \ge r$, $n \ge r$, $\mathbf{F}$ *تطبيقاً –* $\mathscr{C}'$ *للمجموعة المفتوحة* $E \subset \mathbf{R}^n$ *في* $\mathbf{R}^m$*، و* $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ *تمتلك الرتبة* r *لكل* $\mathbf{x} \in E$.

قم بتثبيت $\mathbf{a} \in E$*، ضع* $A = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$*، لتكن* Y_1 *المدى لـ* A*، ولتكن* P *المسقط في* $\mathbf{R}^m$ *الذي مداه* Y_1*. لتكن* Y_2 *فضاء الخمود لـ* P.

عندها يوجد هنالك المجموعتين المفتوحتين U *و* V *في* $\mathbf{R}^n$ *بحيث إن* $U \in E$, $\mathbf{a} \in U$*، ويوجد هنالك التطبيق* $\mathscr{C}'$ $1\text{-}1$ $\mathbf{H}$ *لـ* V *في* U *(الذي يكون معكوسة من الصنف* $\mathscr{C}'$ *أيضاً) بحيث إن*

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \varphi(A\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in V) \tag{٦٦}$$

حيث φ *تطبيقاً –* $\mathscr{C}'$ *للمجموعة المفتوحة* $A(V) \subset Y_1$ *في* Y_2.

بعد البرهان سوف نقدم وصفاً هندسياً اكثر للمعلومات التي تحتويها (٦٦).

البرهان: إذا كانت $r = 0$ فإن المبرهنة ٩، ١٩ تبين إن $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ يكون ثابتاً في الجوار U لـ $\mathbf{a}$، وتحقق (٦٦) بشكل عديم الأهمية، بـ $V = U$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\varphi(0) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$.

من الآن فصاعداً نفترض إن $r > 0$. بما إن $\dim Y_1 = r$، Y_1 *تمتلك الأساس* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$. نختار $\mathbf{z}_i \in \mathbf{R}^n$ بحيث إن $A\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$ $(1 \le i \le r)$، و عرف التطبيق الخطي S في Y_1 في $\mathbf{R}^n$ بوضع

$$S(c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_r\mathbf{y}_r) = c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_r\mathbf{z}_r \tag{٦٧}$$

لجميع الغير متجهات $c_1, \ldots, c_r$.

عندها فإن $AS\mathbf{y}_i = A\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$ لـ $1 \le i \le r$. لذلك فإن

$$AS\mathbf{y} = \mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \in Y_1). \tag{٦٨}$$

عرف التطبيق $\mathbf{G}$ لـ E في $\mathbf{R}^n$ بوضع

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + SP[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}] \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{٦٩}$$

بما إن $\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = A$، فإن تفاضل (٦٩) يبين إن $\mathbf{G}'(\mathbf{a}) = I$، المؤثر المحايد في $\mathbf{R}^n$. استناداً إلى مبرهنة الدالة العكسية، يوجد هنالك مجموعتين U و V في $\mathbf{R}^n$ و $\mathbf{a} \in U$، بحيث إن $\mathbf{G}$ هي تطبيقاً 1-1لـ U في V التي معكوسها $\mathbf{H}$ الذي هو من الصنف $\mathscr{C}'$ أيضاً. إضافة لذلك،

بتقليص U و V، إذا كان ضرورياً، نستطيع إن نرتبها لتكون V محدبة و $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ يكون قابلاً للعكس لكل $\mathbf{x} \in V$.

لاحظ بأن $ASPA = A$ ، بما إن $PA = A$ ، (٦٨) تتحقق. لذلك فإن (٦٩) تعطينا

$$AG(\mathbf{x}) = P\mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E) \ . \tag{٧٠}$$

تتحقق (٧٠) بشكل خاص بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in U$. إذا قمنا باستبدال $\mathbf{x}$ بـ $\mathbf{H}(\mathbf{x})$، فإننا نحصل على

$$P\mathbf{F}\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V) \ . \tag{٧١}$$

عرف

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) - A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V) \ . \tag{٧٢}$$

بما إن $PA = A$ ، فإن (٧١)تؤدي إلى إن $P\psi(\mathbf{x})=0$ لجميع $\mathbf{x} \in V$. لذلك فإن ψ تطبيقاً $-\mathscr{C}'$ لـ V في Y_2.

بما إن V مفتوحة، من الواضح إن $A(V)$ هي مجموعة جزئية مفتوحة لمداها $\mathscr{R}(A) = Y_1$.

لتكملة البرهان، أي للمضي من (٧٢) إلى (٦٦) يجب علينا أن نبين أنة يوجد هنالك تطبيقاً $-\mathscr{C}'$ φ لـ $A(V)$ في Y_2 والتي تحقق

$$\varphi(A\mathbf{x})=\psi(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x}\in V) \ . \tag{٧٣}$$

كخطوة نحو (٧٣)، سوف نقوم أولاً ببرهنة إن

$$\psi(\mathbf{x}_1) = \psi(\mathbf{x}_2) \tag{٧٤}$$

إذا كان $\mathbf{x}_1 \in V, \ \mathbf{x}_2 \in V \ , \ A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$.

ضع $\Phi(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$ بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in V$. بما إن $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ تمتلك الرتبة n لكل $\mathbf{x} \in V$، و $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ تمتلك الرتبة r لكل $\mathbf{x} \in U$ يؤدي ذلك إلى إن

$$\operatorname{rank}\Phi'(\mathbf{x}) = \operatorname{rank}\mathbf{F}'(\mathbf{H}(\mathbf{x}))\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = r \qquad (\mathbf{x} \in V) \ . \tag{٧٥}$$

قم بتثبيت $\mathbf{x} \in V$. لتكن M مدى $\Phi'(\mathbf{x})$. عندها فإن $M \subset \mathbf{R}^m$ ، $\dim M = r$. استناداً إلى (٧١)،

$$P\Phi'(\mathbf{x}) = A \ . \tag{٧٦}$$

لذلك فإن P تطبيق M في $\mathscr{R}(A) = Y_1$. بما أن M و Y_1 تمتلكان نفس البعد، يؤدي ذلك إلى

أن P (محددة restricted إلى M) تكون 1-1.

أفترض الآن أن $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$. عندها فإن $P\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{0}$، بالاستناد إلى (٧٦). لكن $\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h} \in M$، و P هي 1-1 في M. إذن $\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{0}$. بإلقاء نظرة على (٧٢) يتبين لنا أننا قد برهنا الآتي:

إذا كانت $\mathbf{x} \in V$ و $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$، *فإن* $\psi'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

نستطيع الآن أن نبرهن (٧٤). فإن $\mathbf{x}_1 \in V$, $\mathbf{x}_2 \in V$, $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$. ضع $\mathbf{h} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ وعرف

$$\mathbf{g}(t) = \psi(\mathbf{x}_1 + t\mathbf{h}) \qquad (0 \le t \le 1). \tag{٧٧}$$

أن تحدب V تبين أن $\mathbf{x}_1 + t\mathbf{h} \in V$ بالنسبة إلى هذه الـ t. إذن

$$\mathbf{g}'(t) = \psi'(\mathbf{x}_1 + t\mathbf{h})\mathbf{h} = \mathbf{0} \qquad (0 \le t \le 1) \tag{٧٨}$$

لذلك فإن $\mathbf{g}(1) = \mathbf{g}(0)$. لكن $\mathbf{g}(1) = \psi(\mathbf{x}_2)$ و $\mathbf{g}(0) = \psi(\mathbf{x}_1)$. وهذا يبرهن (٧٤).

استناداً إلى (٧٤) فإن $\psi(\mathbf{x})$ تعتمد فقط على $A\mathbf{x}$ بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in V$. إذن فإن (٧٣) تعرف φ بشكل واضح جداً في $A(V)$. بقي علينا فقط أن نبرهن إن $\varphi \in \mathscr{C}'$.

قم بتثبيت $\mathbf{y}_0 \in (A)V$ وثبت $\mathbf{x}_0 \in V$ بحيث أن $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$ بما إن V مفتوحة، فإن $\mathbf{y}_0$ تمتلك جوار W في Y_1 بحيث إن المتجه

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + S(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \tag{٧٩}$$

يقع في V لجميع $\mathbf{y} \in W$. استناداً إلى (٦٨)،

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}\ .$$

لذلك فإن (٧٣) و (٧٩) تعطينا

$$\varphi(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x} - S\mathbf{y}_0 + S\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W)\ . \tag{٨٠}$$

إن هذه المعادلة تبين إن $\varphi \in \mathscr{C}'$ في W. إذن في $A(V)$، نظراً لأن $\mathbf{y}_0$ قد اختيرت عشوائياً في $A(V)$.

يكون البرهان قد اكتمل الآن.

نقدم الآن المعنى الهندسي الذي تقدمه المبرهنة حول التطبيق $\mathbf{F}$. إذا كانت $\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U)$ فإن $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$ لبعض $\mathbf{x} \in V$، وتبين (٦٦) إن $P\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

لذلك فإن

$$\mathbf{y} = P\mathbf{y} + \varphi(P\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U)) \tag{٨١}$$

يبين هذا بأن $\mathbf{y}$ تحدد مسقطها $P\mathbf{y}$، وإن P، محددة إلى $\mathbf{F}(U)$، تكون تطبيقاً 1-1 لـ $\mathbf{F}(U)$ في $A(V)$. لذلك فإن $\mathbf{F}(U)$ " سطحاً بالأبعاد – r" "*r - dimensional surface*" بنقطة واحدة بالضبط "فوق" "*over*" كل نقطة من نقاط $A(V)$. قد نعتبر أيضاً إن $\mathbf{F}(U)$ هي الرسم البياني لـ φ.

إذا كانت $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$، كما في البرهان، فإن (٦٦) تبين إن المجموعات المتساوية لـ Φ (هذه هي المجموعات التي تأخذ فيها Φ قيمة معينة) هي بالضبط المجموعات المتساوية لـ A في V. تكون هذه المجموعات "مسطحة" "*flat*" نظراً لأنها تقاطعات مع V لتحويلات الفضاء المتجه $\mathcal{N}(A)$. لاحظ بأن $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ التمرين (٢٥).

إن المجموعات المتساوية لـ $\mathbf{F}$ في U هي الصور *images* تحت $\mathbf{H}$ للمجموعات المتساوية المسطحة لـ Φ في V. لذلك فإنها " سطوح بأبعاد – $(n-r)$ " في U.

المحددات Determinants

إن المحددات هي أعداداً ترافق القياسات المترية المربعة، وهكذا للمؤثرات الممثلة بمثل هذه القياسات. تكون المحددات0 إذا وإذا فقط كان المؤثر صاحب العلاقة غير قابل للعكس. لذلك فإن بالإمكان استخدامها لنقرر فيما إذا كانت النظريات السابقة تتحقق أم لا. وسوف تلعب المحددات دوراً أكثر أهمية في الفصل العاشر.

٩، ٣٣ تعريف: إذا كانت $(j_1, \ldots, j_n)$ أعداداً صحيحة مرتبة و مضاعفات – n، المعرفة بـ

$$s(j_1, \ldots, j_n) = \prod_{p<q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p) , \tag{٨٢}$$

حيث إن $\operatorname{sgn} x = 1$ إذا كان $x > 0$، $\operatorname{sgn} x = -1$ إذا كان $x < 0$، $\operatorname{sgn} x = 0$ إذا كان $x = 0$. عندها فإن $s(j_1, \ldots, j_n) = 1, -1, or 0$، وهي تغير الإشارة إذا تم تبادل إي اثنين من ألـ $j's$.

لتكن $[A]$ مصفوفة المؤثر الخطي A في $\mathbb{R}^n$، نسبة إلى الأساس القياسي $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$، بالمدخلات $a(i,j)$ في الصف ألـ ith والعمود الـ jth، تعرف المحددة $[A]$ بأنها العدد

$$\det[A] = \sum s(j_1,\ldots,j_n)a(1,j_1)a(2,j_2)\ldots a(n,j_n) \quad . \tag{٨٣}$$

إن المجموع في(٨٣) يمتد عبر جميع المضاعفات n– المرتبة للأعداد الصحيحة $(j_1,\ldots,j_n)$ بحيث $1 \le j_r \le n$.

المتجهات العمودية $\mathbf{x}_j$ لـ $[A]$] هي

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a(i,j)\,\mathbf{e}_j \qquad (1 \le j \le n). \tag{٨٤}$$

من الملائم التفكير بـ $\det[A]$ كدالة للمتجهات العمودية $[A]$. إذا كتبنا

$$\det(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) = \det[A],$$

det هنا دالة حقيقية في مجموعة جميع المتجهات المرتبة للمضاعفات الـ n في $\mathbf{R}^n$.

٩، ٣٤ مبرهنة:

(أ) *إذا كانت I المؤثر المحايد في $\mathbf{R}^n$، فإن*

$$\det[I] = \det(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) = 1 \ .$$

(ب) *تكون det دالة خطية لكل المتجهات العمودية $\mathbf{x}_j$، إذا تم تثبيت الأعمدة الأخرى.*

(ج) *إذا حصلنا على $[A]_1$ من $[A]$ بمبادلة عمودين، فإن* $\det[A]_1 = -\det[A]$.

(د) *إذا كانت* **[A]** *تمتلك عمودين متساويين، فإن* $\det[A] = 0$.

البرهان: إذا كانت $A = I$، فإن $a(i,i) = 1$ و $a(i,j)$ بالنسبة إلى $i \ne j$. إذن

$$\det[I] = s(1,2,\ldots,n) = 1\,,$$

والتي تبرهن (أ). استناداً إلى (٨٢)، فإن $s(j_1,\ldots,j_n) = 0$، إذا كان أي أثنين من ألـ $j's$ متساويين. كل حاصل الضرب المتبقية $n!$في (٨٣) تحتوي على عامل واحد فقط من كل عمود. إن هذا يبرهن (ب). تعتبر (ج) نتيجة مباشرة لكون $s(j_1,\ldots,j_n)$ تبدل الإشارة إذا تمت مبادلة إي أثنين من ألـ $j's$ وتعتبر (د) نتيجة لـ (ج).

٩، ٣٥ مبرهنة: *إذا كانت $[A]$ و $[B]$ مصفوفتين n بـ n فإن*

$$\det([B][A]) = \det[B]\det[A] \ .$$

البرهان: إذا كانت $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ أعمدة $[A]$، عرف

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]) \ . \tag{٨٥}$$

إن أعمدة $[A]$ $[B]$ هي المتجهات $B\mathbf{x}_1,\ldots,B\mathbf{x}_n$. لذلك فإن

$$\Delta_n(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)=\det(B\mathbf{x}_1,\ldots,B\mathbf{x}_n) \qquad (٨٦)$$

استنادا إلى (٨٦) والمبرهنة ٩، ٣٤، فإن Δ_B يمتلك أيضاً الخصائص ٩، ٣٤ (ب) إلى (د).
استناداً إلى (ب) و (٨٤)،

$$\Delta_B[A]=\Delta_B\left(\sum_i a(i,1)\mathbf{e}_i,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\right)=\sum_i a(i,1)\Delta_B\left(\mathbf{e}_i,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\right)$$

بتكرار هذه العملية لـــ $\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_n$، فإننا نحصل على

$$\Delta_B[A]=\sum a(i_1,1)a(i_2,2)\cdots a(i_n,n)\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1},\ldots\mathbf{e}_{i_n}), \qquad (٨٧)$$

يمتد المجموع عبر جميع المضاعفات النونية المرتبة $(i_1,\ldots,i_n)$ بـــ $1\le i_r\le n$ استناداً إلى (ج) و (د)

$$\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_n})=t(i_1,\ldots,i_n)\Delta_B(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\ , \qquad (٨٨)$$

حيث إن $t=1,0 \quad \text{or} \quad -1$، وبما إن $[B][I]=[B]$، فإن (٨٥) تبين إن

$$\Delta_B(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)=\det[B] \qquad (٨٩)$$

بتعويض (٨٩) و(٨٨) في (٨٧)، فإننا نحصل على

$$\det([B][A])=\left\{\sum a(i_1,1)\ldots a(i_n,n)t(i_1,\ldots,i_n)\right\}\det[B]$$

لجميع المصفوفتين n بـــ n $[A]$ و $[B]$. بوضع $B=I$، فإننا نلاحظ إن المجموع بين القوسين أعلاه هو $\det[A]$. وهذا يبرهن المبرهنة.

٩، ٣٦ مبرهنة: *يكون المؤثر الخطي A في $\mathbf{R}^n$ قابلاً للعكس إذا وإذا فقط كانت $\det[A]\neq 0$.*

البرهان: إذا كانت A قابلة للعكس، فإن المبرهنة ٩، ٣٥ تبين أن

$$\det[A]\det\left[A^{-1}\right]=\det\left[AA^{-1}\right]=\det[I]=1,$$

لذلك فإن $\det[A]\neq 0$.

إذا لم تكن A قابلة للعكس، فإن الأعمدة $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ تكون تابعة (معتمدة) (المبرهنة ٩، ٥) ؛ إذن يوجد هنالك عنصراً واحداً، لنقل، $\mathbf{x}_k$، بحيث أن

$$\mathbf{x}_k+\sum_{j\neq k}c_j\mathbf{x}_j=0 \qquad (٩٠)$$

بالنسبة إلى بعض الغير متجهات c_j. استنادا إلى ٩، ٣٤ (ب) و(د)، فإنه بالإمكان استبدال $\mathbf{x}_k$ بـ $\mathbf{x}_k + c_j\mathbf{x}_j$ بدون تغير المحددة، إذا كانت $j \neq k$. بتكرار العملية، نلاحظ أنه بالإمكان استبدال $\mathbf{x}_k$
بالجانب الأيسر من (٩٠)، أي، بـ $\mathbf{0}$، بدون تغير المحددة. ولكن المصفوفة التي يكون أحد أعمدتها $\mathbf{0}$ تمتلك محددة $\mathbf{0}$. إذن $\det[A] = 0$.

٩، ٣٧ ملاحظة: لنفترض أن $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ و $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}$ أساسان في $\mathbf{R}^n$. كل مؤثر خطي A في $\mathbf{R}^n$ يحدد المصفوفتين $[A]$ و $[A]_U$، بالمداخل a_{ij} و α_{ij}، المقدمة بـ

$$A\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij}\mathbf{e}_i, \qquad A\mathbf{u}_j = \sum_i \alpha_{ij}\mathbf{u}_i.$$

إذا كانت $\mathbf{u}_j = B\mathbf{e}_j = \sum b_{ij}\mathbf{e}_i$، فإن $A\mathbf{u}_j$ يكون مساوي إلى

$$\sum_k \alpha_{kj} B\mathbf{e}_k = \sum_k \alpha_{kj}\sum_i b_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_i\left(\sum_k b_{ik}\alpha_{kj}\right)\mathbf{e}_i,$$

وكذلك إلى

$$AB\mathbf{e}_j = A\sum_k b_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_i\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)\mathbf{e}_i.$$

لذلك فإن $\sum b_{ik}\alpha_{kj} = \sum a_{ik}b_{kj}$، أو

$$[B][A]_U = [A][B]. \qquad (٩١)$$

بما أن B قابلة للعكس، فإن $\det[B] \neq 0$. إذن (٩١)، مع المبرهنة ٩، ٣٥، تبين أن

$$\det[A]_U = \det[A]. \qquad (٩٢)$$

لذلك فإن محددة مصفوفة المؤثر الخطي لا تعتمد على الأساس الذي استخدم لبناء المصفوفة. *لذلك يجدر بنا التحدث عن محددة المؤثر الخطي بدون التفكير بالأساس.*

٩، ٣٨ جاكوبين Jacobians: إذا كانت $\mathbf{f}$ تطبيق المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^n$، وكانت $\mathbf{f}$ قابلة للتفاضل عند النقطة $\mathbf{x} \in E$، فإن محددة المؤثر الخطي $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ تدعى *الجاكوبين لـ* $\mathbf{f}$ *عند* $\mathbf{x}$ *Jacobian of* $\mathbf{f}$ *at* $\mathbf{x}$. ويرمز لذلك

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}). \qquad (٩٣)$$

وسوف نستخدم أيضاً الرمز

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \qquad (٩٤)$$

بالنسبة إلى $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$، إذا كانت $(y_1,\ldots,y_n)=\mathbf{f}(x_1,\ldots,x_n)$.

بحدود جاكوبين، فإن الأفتراض الأساسي في مبرهنة الدالة العكسية هو $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})\neq 0$ (قارن المبرهنة ٩، ٣٦). إذا كتبنا مبرهنة الدالة الضمنية بحدود الدوال (٥٩)، فإن الافتراض المذكور هنالك بخصوص A يصبح كالآتي

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\neq 0.$$

المشتقات ذات الرتبة الأعلى Derivatives of Higher Order

٩، ٣٩ تعريف: لنفترض أن f دالة حقيقية معرفة في المجموعة المفتوحة $E\subset\mathbf{R}^n$، بالمشتقات الجزئية $D_1f,\ldots,D_nf$. إذا كانت الدوال D_jf قابلة للتفاضل، فإن ***المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية*** لـــ f ***the second-order partial derivatives of*** f تكون معرفة بـــ

$$D_{ij}f=D_iD_jf \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

إذا كانت جميع هذه الدوال $D_{ij}f$ مستمرة في E، فإننا نقول أن f تكون من الصف $\mathcal{C}''$ في E. أو أن $f\in\mathcal{C}''(E)$.

يقال للتطبيق $\mathbf{f}$ لــE في $\mathbf{R}^m$ من الصف $\mathcal{C}''$ إذا كل مركبة من المركبات $\mathbf{f}$ من الصف $\mathcal{C}''$. من الجائز أن تكون $D_{ij}f\neq D_{ji}f$ عند بعض النقاط، على الرغم من وجود كلا المشتقتين (راجع التمرين ٢٧). على الرغم من ذلك، فإننا سوف نلاحظ أدناه $D_{ij}f=D_{ji}f$ كلما كانت هاتين المشتقتين مستمرتين.

لأجل التبسيط (وبدون خسارة العمومية) فإننا سوف نذكر المبرهنتين بالنسبة إلى الدوال الحقيقية ذات المتغيرين. المبرهنة الأولى هي القيمة الوسطية.

٩، ٤٠ مبرهنة: *لنفترض إن f معرفة في المجموعة المفتوحة $E\subset\mathbf{R}^2$ وأن D_1f و $D_{21}f$ موجودتان عند كل نقطة من نقاط E. لنفترض أن $Q\subset E$ مثلثاً مغلقاً بجوانب موازية للمحاور الإحداثية، والذي يمتلك (a,b) و $(a+h,b+k)$ كرؤوس متقابلة* $(h\neq 0,k\neq 0)$. ضع

$$\Delta(f,Q) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b).$$

عندها يوجد هنالك نقطة (x,y) داخل Q بحيث أن

$$\Delta(f,Q) = hk(D_{21}f)(x,y) \qquad (٩٥)$$

لاحظ التشابه بين (٩٥) والمبرهنة ٥، ١٠ ؛ أن مساحة Q هي hk.

البرهان: ضع $u(t) = f(t,b+k) - f(t,b)$. إن تطبيق للمبرهنة ٥، ١٠يبين أنه يوجد هنالك x بين a و $a+h$، وأنه يوجد هنالك y بين b و $b+k$، بحيث أن

$$\begin{aligned}\Delta(f,Q) &= u(a+h) - u(a)\\ &= hu'(x)\\ &= h\left[(D_1f)(x,b+k) - (D_1f)(x,b)\right]\\ &= hk(D_{21}f)(x,y).\end{aligned}$$

٩، ٤١ مبرهنة: *لنفترض أن f معرفة في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^2$. لنفترض أن $D_1f, D_{21}f$ و D_2f موجودة عند كل نقطة من نقاط E، وإن $D_{21}f$ مستمرة عند بعض النقاط $(a,b) \in E$.*

عندها فإن $D_{12}f$ موجودة عند (a,b) و

$$(D_{12}f)(a,b) = (D_{21}f)(a,b) \ . \qquad (٩٦)$$

نتيجة: $D_{21}f = D_{12}f$ إذا كانت $f \in \mathscr{C}''(E)$.

البرهان: ضع $A = (D_{21}f)(a,b)$. نختار $\varepsilon > 0$. إذا كانت Q مثلثاً كما في المبرهنة ٩، ٤٠. وإذا كان h و k صغيران عما فيه الكفاية، فإن لدينا

$$\left|A - (D_{21}f)(x,y)\right| < \varepsilon$$

لجميع $(x,y) \in Q$. لذلك فإن

$$\left|\frac{\Delta(f,Q)}{hk} - A\right| < \varepsilon,$$

استناداً (٩٥). قم بتثبيت h، و دع $k \to 0$. بما أن D_2f موجودة في E، فإن المتباينة الأخيرة تؤدي إلى إن

$$\left|\frac{\left(D_2 f\right)(a+h,b)-\left(D_2 f\right)(a,b)}{h}-A\right|\le \varepsilon. \qquad (٩٧)$$

بما أن ε كانت عشوائية، وبما أن (٩٧) تتحقق لجميع الـ $h \neq 0$، الصغيرة وبما فيه الكفاية، فإن ذلك يؤدي إلى أن $A = \left(D_{12} f\right)(a,b)$. وهذا يعطينا (٩٦).

تفاضل المتكاملات Differentiation Of Integrals

لنفترض أن φ دالة لمتغيرين والتي يمكن تكاملها بالاستناد إلى متغير واحد ويمكن تفاضلها بالنسبة للآخر. ما هي الشروط التي تجعل النتيجة متساوية إذا تم إجراء هاتين العمليتين بالاتجاه المعاكس؟ وبوضع السؤال بصورة اكثر دقة: ما هي الشروط الموضوعة على φ والتي يمكن للمرء بموجبها برهنة أن المعادلة

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \varphi(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)dx \qquad (٩٨)$$

صحيحة ؟ (يقدم التمرين ٢٨ مثالاً معاكساً لذلك).

سيكون من الملائم استخدام الرمز

$$\varphi^t(x) = \varphi(x,t). \qquad (٩٩)$$

لذلك فإن φ^t هي دالة لمتغير واحد، لكل t.

٩، ٤٢ مبرهنة: *لنفترض أن*

(أ) $\varphi(x,t)$ *معرفة بالنسبة إلى* $a \le x \le b$, $c \le t \le d$ ؛

(ب) α *دالة متزايدة في* $[a,b]$ ؛

(ج) $\varphi^t \in \Re(\alpha)$ لكل $t \in [a,b]$ ؛

(د) $c < s < d$، ولكل $\varepsilon > 0$ *يوجد هنالك* $\delta > 0$ *بحيث أن*

$$\left|\left(D_2\varphi\right)(x,t)-\left(D_2\varphi\right)(x,s)\right| < \varepsilon$$

بالنسبة إلى جميع $x \in [a,b]$ *ولجميع* $t \in (s-\delta, s+\delta)$.

عرف

$$f(t) = \int_a^b \varphi(x,t)d\alpha(x) \qquad (c \le t \le d). \qquad (١٠٠)$$

عندها فإن $f'(s), \left(D_2\varphi\right)^s \in \Re(\alpha)$ *موجودة، و*

$$f'(s)=\int_a^b \left(D_2\varphi\right)(x,s)d\alpha(x). \qquad (١٠١)$$

لاحظ بأن (ج) تؤدي ببساطة وجود المتكاملات (١٠٠) لجميع $t\in[c,d]$. لاحظ أيضاً بأن (د) تتحقق بالتأكيد كلما كانت $D_2\varphi$ مستمرة في المثلث الذي تكون φ معرفة فيه.

البرهان: لاحظ خوارج قسمة الفرق

$$\psi(x,t)=\frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,s)}{t-s}$$

بالنسبة إلى $0<|t-s|<\delta$. استناداً إلى المبرهنة ٥، ١٠ يوجد هنالك لكل (x,t) العدد u بينs و t بحيث إن

$$\psi(x,t)=(D_2\varphi)(x,u)\ .$$

إذن تؤدي (د) إلى إن

$$\left|\psi(x,t)-(D_2\varphi)(x,s)\right|<\varepsilon \qquad (a\le x\le b,\quad 0<|t-s|<\delta)\ . \qquad (١٠٢)$$

لاحظ بأن

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\int_a^b\psi(x,t)d\alpha(x)\ . \qquad (١٠٣)$$

استناداً إلى (١٠٣)، فإن $\psi^t\to(D_2\varphi)^s$ بانتظام في $[a,b]$، عندما $t\to s$. بما إن كل $\psi^t\in\Re(\alpha)$، فإن النتيجة المطلوبة يحصل عليها من (١٠٣) والمبرهنة ٧، ١٦.

٩، ٤٢ مثال: من الطبيعي إننا نستطيع برهنة مثيل للمبرهنة ٩، ٤٢ وذلك بوضع $(-\infty,\infty)$ بدلاً من القيام بذلك، لنلاحظ المثال التالي. عرف

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos(xt)dx \qquad (١٠٤)$$

و

$$g(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}\sin(xt)dx\ , \qquad (١٠٥)$$

بالنسبة إلى $-\infty<t<\infty$. إن كلاً من المتكاملين موجودان [وهما يقتربان بصورة مطلقة] نظراً لأن القيم المطلقة للمتكاملين هما على الأكثر $\exp(-x^2)$ و $|x|\exp(-x^2)$، على التوالي.

لاحظ بأننا نحصل على g من f لتفاضل المتكامل بالنسبة إلى t. إننا نقول إن f قابلاً للتفاضل وإن

$$f'(t)=g(t) \qquad (-\infty<t<\infty)\ . \qquad (١٠٦)$$

لبرهنة ذلك، لنتفحص أولاً خوارج قسمة الفرق جتا للـ **cosine**: إذا كانت $\beta > 0$، فإن

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha}{\beta}+\sin\alpha=\frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}(\sin\alpha-\sin t)dt \; . \qquad (١٠٧)$$

بما إن $|\sin\alpha - \sin t| \le |t-\alpha|$، فإن الجزء الأيمن من (١٠٧) يساوي على الأكثر $\beta/2$ كقيمة مطلقة ؛ يتم معالجة الحالة التي تكون فيها $\beta < 0$ بنفس الطريقة. لذلك فإن

$$\left|\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha}{\beta}+\sin\alpha\right|\le|\beta| \qquad (١٠٨)$$

بالنسبة إلى جميع β (إذا تم تفسير الجزء الأيسر بأنة يساوي 0 عندما $\beta = 0$).

الآن قم بتثبيت t، وثبت $h \ne 0$. طبق (١٠٨) بـ $\beta = xh, \alpha = xt$؛ نستنتج من (١٠٤) و(١٠٥) بأن

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-g(t)\right|\le|h|\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}\,dx.$$

عندما $h \to 0$، نكون قد حصلنا على (١٠٦).

لنخطو خطوة أخرى: إذا طبقنا التكامل بالتجزئة على (١٠٤) فإننا نلاحظ أن

$$f(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}\frac{\sin(xt)}{t}dx. \qquad (١٠٩)$$

لذلك فإن $tf(t) = -2g(t)$، وإن (١٠٦) تؤدي الآن إلى أن f تحقق المعادلة التفاضلية

$$2f'(t)+tf(t)=0. \qquad (١١٠)$$

إذا قمنا بحل هذه المعادلة التفاضلية واستخدمنا كون $f(0)=\sqrt{\pi}$ (راجع البند ٨، ٢١)، فإننا نتوصل إلى أن

$$f(t)=\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right). \qquad (١١١)$$

وبذلك فإن المتكامل (١٠٤) قد تم تحديده بشكل واضح.

تمارين EXERCISES

١- إذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية للفضاء المتجه X، برهن (كما تم تأكيد ذلك في البند ٩، ١) بأن امتداد S يكون فضاءاً متجهاً.

٢- برهن (كما تم تأكيد ذلك في البند ٩، ٦) بأن BA تكون خطية إذا كان A و B تحويليين خطيين.

برهن أيضاً على أن A^{-1} خطية وقابلة للعكس.

٣- افترض إن $A \in L(X,Y)$ و $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ فقط عندما تكون $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. برهن على إن ذلك يؤدي إلى إن A هي 1-1.

٤- برهن (كما تم تأكيد ذلك في الجزء ٩، ٣٠) على إن فضاءات الخمود ومديات التحويلات الخطية تكون فضاءآت متجهة.

٥- برهن على إن لكل $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$ يوجد هنالك $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ بحيث إن $A\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

برهن أيضاً على إن $\|A\| = |\mathbf{y}|$.

تلميح: تحت ظروف معينة، تتحقق المساواة في متباينة شوا رز.

٦- إذا كانت $f(0,0) = 0$ و

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{إذا كانت} \quad (x,y) \neq (0,0)،$$

برهن على إن $(D_1 f)(x,y)$ و $(D_2 f)(x,y)$ موجودة عند كل نقطة من نقاط $\mathbf{R}^2$، على الرغم من إن f ليست مستمرة في $(0,0)$.

٧- أفترض أن f دالة قيمة – حقيقية معرفة في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$، وإن المشتقات الجزئية $D_1 f, \ldots, D_n f$ مقيدة في E. برهن أن f مستمرة في E.

تلميح: أتبع الخطوات المذكورة في برهان المبرهنة ٩، ٢١.

٨- أفترض أن f دالة حقيقية قابلة للتفاضل في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$، وإن f تمتلك قيمة قصوى محلية في النقطة $\mathbf{x} \in E$. برهن على أن $f'(\mathbf{x}) = 0$.

٩- إذا كانت $\mathbf{f}$ تطبيقاً قابلاً للتفاضل للمجموعة المفتوحة *المترابطة* *connected* $E \subset \mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^m$، وإذا كانت $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ لكل $\mathbf{x} \in E$ برهن على أن $\mathbf{f}$ ثابتة في E.

١٠- إذا كانت f دالة حقيقية معرفة في المجموعة المفتوحة المحدبة $E \subset \mathbf{R}^n$، بحيث أن $(D_1 f)(\mathbf{x}) = 0$ لكل $\mathbf{x} \in E$، برهن على أن $f(\mathbf{x})$ تعتمد فقط على $x_2, \ldots, x_n$.

بين أنه بالإمكان استبدال تحدب E بشرط أخف من ذلك، ولكن ذلك يتطلب بعض الشروط الأخرى. على سبيل المثال، إذا كانت $n = 2$ و E تأخذ شكل حذوة الحصان horseshoe، فإن العبارة قد تكون خاطئة.

١١- إذا كانت f و g دالتين حقيقيتين قابلتين للتفاضل في $\mathbf{R}^n$، برهن على أن

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

وأن $\nabla(1/f) = -f^{-2}\nabla f$ كلما كانت $f \neq 0$.

١٢- حدد عددين a و b، $0 < a < b$. عرف التطبيق $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ لـ $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}^3$ بـ

$$f_1(s,t) = (b + a\cos s)\cos t$$
$$f_2(s,t) = (b + a\cos s)\sin t$$
$$f_3(s,t) = a\sin s.$$

صف المدى K لـ $\mathbf{f}$. (إنه مجموعة جزئية متراصة معينة لـ $\mathbf{R}^3$).

(أ) بين أنه يوجد هنالك بالضبط أربعة نقاط $\mathbf{p} \in K$ بحيث أن

$$(\nabla f_1)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})) = \mathbf{0}.$$

أوجد هذه النقاط.

(ب) حدد المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{q} \in K$ بحيث أن

$$(\nabla f_3)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}.$$

(ج) بين أن واحدة من النقاط p في (أ) تتعلق بالقيمة القصوى المحلية لـ f_1، وواحدة تتعلق بالقيمة الدنيا، وإن النقطتين الأخيرتين ليستا كذلك (يطلق على مثل هذه النقاط "نقاط السرج" "saddle points").

أي من النقاط q التي وجدناها في (ب) تتعلق بقيمة قصوى أو دنيا ؟

(د) لتكن λ عدداً حقيقياً غير نسبي، وعرف $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \lambda t)$. برهن على أن $\mathbf{g}$ تكون تطبيقاً 1-1 لـ $\mathbf{R}^1$ في المجموعة الجزئية الكثيفة لـ K. برهن على أن

$$|\mathbf{g}'(t)|^2 = a^2 + \lambda^2(b + a\cos t)^2.$$

١٣- أفترض أن f تطبيقاً قابلاً للتفاضل لــ $\mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^3$ بحيث أن $|\mathbf{f}(t)|=1$ لكل t. برهن على أن $\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)=0$.

عبر عن هذه النتيجة هندسياً.

١٤- عرف $f(0,0)=0$ و

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{إذا كانت} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

(أ) برهن على إن $D_1 f$ و $D_2 f$ دالتين مقيدتين في $\mathbf{R}^2$. (إذن f تكون مستمرة).

(ب) لتكن $\mathbf{u}$ أي وحدة متجهة في $\mathbf{R}^2$. بين إن المشتقة المتجهة $(D_{\mathbf{u}}f)(0,0)$ موجودة، وإن قيمتها المطلقة تكون على الأكثر ١.

(ج) لتكن γ تطبيقاً قابلاً للتفاضل لــ $\mathbf{R}^1$ في $\mathbf{R}^2$ (بكلمة أخرى، γ منحنياً قابلاً للتفاضل في $\mathbf{R}^2$)، بــ $\gamma(0)=(0,0)$ و $|\gamma'(0)|>0$ ضع $g(t)=f(\gamma(t))$ وبرهن إن g قابلة للتفاضل لكل $t\in\mathbf{R}^1$.

إذا كانت $\gamma\in\mathcal{C}'$، برهن إن $g\in\mathcal{C}'$.

(ء) على الرغم من ذلك، برهن إن f ليست قابلة للتفاضل في $(0,0)$.

تلميح: الصيغة (٤٠) لا تتحقق.

١٥- عرف $f(0,0)=0$، وضع

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

إذا كانت $(x,y)\neq(0,0)$.

(أ) بالنسبة لجميع $(x,y)\in\mathbf{R}^2$، برهن على أن

$$4x^4y^2\leq(x^4+y^2)^2.$$

واستنتج أن f مستمرة.

(ب) بالنسبة إلى $0\leq\theta\leq2\pi\ ,\ -\infty<t<\infty$، عرف

$$g_\theta(t)=f(t\cos\theta,t\sin\theta).$$

بين أن $g_\theta(0)=0$، $g'_\theta(0)=0\ ,\ g''_\theta(0)=2$. لذلك فإن كل g_θ تمتلك قيمة دنيا محلية صارمة في $t=0$. بكلمة أخرى، فإن تحديد f لكل خط يمر عبر $(0,0)$ يمتلك قيمة دنيا محلية صارمة في $(0,0)$.

(ج) بين إنه على الرغم من ذلك فإن $(0,0)$ ليست قيمة دنيا محلية لـــ f، نظراً لأن $f(x,x^2) = -x^4$.

١٦- بين إن استمرارية f' في النقطة a ضرورية في مبرهنة الدالة العكسية، حتى في الحالة التي تكون فيها $n = 1$: إذا كانت

$$f(t) = t + 2t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

بالنسبة إلى $t \neq 0$، و$f(0) = 0$، فإن $f'(0) = 1$، f' مقيدة في $(-1,1)$ ولكن f ليست واحد-لـــ واحد في إي منطقة مجاورة لـــ 0.

١٧- لتكن $f = (f_1, f_2)$ تطبيق R^2 في R^2 المقدم بـــ

$$f_1(x,y) = e^x \cos y, \qquad f_2(x,y) = e^x \sin y$$

(أ) ما هو مدى f؟

(ب) بين إن الجاكوبين لـــ f لا يكون صفراً في أي نقطة من نقاط R^2، ولذلك فإن كل نقطة من نقاط R^2 تمتلك جوار تكون فيها f واحد-لـــ -واحد. على الرغم من إن، f ليست واحد -لـــ-واحد في R^2.

(ج) ضع $a = (0, \pi/3)$، $b = f(a)$، ولتكن g معكوساً مستمراً لـــ f معرفاً في الجوار لـــ b، بحيث إن $g(b) = a$. أوجد صيغة واضحة لـــ g، احتسب $f'(a)$ و $g'(b)$، وبرهن الصيغة (٥٢).

(د) ما هي الصور تحت f للخطوط الموازية للمحاور الإحداثية ؟

١٨- أجب على نفس الأسئلة بالنسبة للتطبيق المعرف بـــ

$$v = 2xy \qquad u = x^2 - y^2$$

١٩- بين إنه بالإمكان حل نظام المعادلات

$$3x + y - z + u^2 = 0$$
$$x - y + 2z + u = 0$$
$$2x + 2y - 3z + 2u = 0$$

بالنسبة إلى x,y,u بوحدات z ؛ بالنسبة إلى x,z,u بوحداتy ؛بالنسبة إلى y,z,u بوحدات x؛ ولكن ليس بالنسبة إلى x,y,z بوحداتu.

٢٠- ضع $n = m = 1$ في مبرهنة الدالة الضمنية، وفسر المبرهنة (إضافة إلى برهانها) بينياً.

٢١- عرف f في $\mathbf{R}^2$ بـ

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 \ .$$

(أ) أوجد النقاط الأربعة في $\mathbf{R}^2$ التي تكون فيها مكونات f صفراً. بين إن f تمتلك قيمة قصوى محلية واحدة بالضبط وقيمة دنيا محلية واحدة في $\mathbf{R}^2$.

(ب) لتكن S مجموعة جميع $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ التي يكون عندها $f(x,y) = 0$ أوجد تلك النقاط لـ S التي لا تمتلك جوار يمكن حل المعادلة $f(x,y) = 0$ فيها بالنسبة إلى y بحدود x (أو بالنسبة إلى x بحدود y). أوصف S بأكثر دقة ممكنة.

٢٢- قم بنفس العملية بالنسبة إلى

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2 \ .$$

٢٣- عرف f في $\mathbf{R}^3$ بـ

$$f(x,y_1,y_2) = x^2 y_1 + e^x + y_2 .$$

بين أن $f(0,1,-1) = 0$ ، $(D_1 f)(0,1,-1) \neq 0$، وإنه لذلك يوجد هنالك دالة قابلة للتفاضل g في بعض المناطق المجاورة لـ $(1,-1)$ في $\mathbf{R}^2$، بحيث أن $g(1,-1) = 0$ و

$$f(g(y_1,y_2),y_1,y_2) = 0.$$

أوجد $(D_1 g)(1,-1)$ و $(D_2 g)(1,-1)$.

٢٤- بالنسبة إلى $(x,y) \neq (0,0)$، عرف $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ بـ

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad , \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} .$$

احتسب رتبة $\mathbf{f}'(x,y)$، وأوجد مدى $\mathbf{f}$.

٢٥- أفترض أن $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ ، لتكن r المرتبة لـ A.

(أ) عرف S كما في برهان المبرهنة ٩، ٣٢. بين أن SA هي المسقط في $\mathbf{R}^n$ التي يكون فضاءها الخامد null space $\mathcal{N}(A)$ ومداها $\mathcal{R}(S)$. *تلميح:* استناداً إلى (٦٨)، $SASA = SA$.

(ب) استخدم (أ) لتبين أن

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n \ .$$

٢٦- بين أن وجود (و حتى الاستمرارية) $D_{12} f$ لا تدل على وجود $D_1 f$ على سبيل

المثال، لتكن $f(x,y) = g(x)$ ، حيث أن g غير قابلة للتفاضل في أي مكان.

٢٧- ضع $f(0,0) = 0$ ، و

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

إذا كانت $(x,y) \neq (0,0)$. برهن على أن

(أ) $D_2 f, D_1 f, f$ مستمرة في $\mathbf{R}^2$ ؛

(ب) $D_{12} f$ و $D_{21} f$ موجودة عند كل نقطة من نقاط $\mathbf{R}^2$، ومستمرة فيها عدا في **(0,0)** ؛

(ج) $(D_{12} f)(0,0) = 1$ ، و $(D_{21} f)(0,0) = -1$.

٢٨- بالنسبة إلى $t \geq 0$، ضع

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \sqrt{t}) \\ -x + 2\sqrt{t} & (\sqrt{t} \leq x \leq 2\sqrt{t}) \\ 0 & (\text{ما تبقى}) \end{cases}$$

وضع $\varphi(x,t) = -\varphi(x,|t|)$ إذا كانت $t < 0$.

بين أن φ تكون مستمرة في $\mathbf{R}^2$، وأن

$$(D_2 \varphi)(x,0) = 0$$

لجميع x عرف

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \varphi(x,t)\,dx.$$

بين أن $f(t) = t$ إذا كانت $|t| < \frac{1}{4}$. إذن

$$f'(0) \neq \int_{-1}^{1} (D_2 \varphi)(x,0)\,dx.$$

٢٩- لتكن E مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^n$. الصنفين $\mathscr{C}'(E)$ و $\mathscr{C}''(E)$ معرفين سابقاً. بطريقة الاستقراء الرياضي، فإنه بالإمكان تعريف $\mathscr{C}^{(k)}(E)$ كالتالي بالنسبة إلى جميع الأعداد الصحيحة الموجبة k: إن قولنا بأن $f \in \mathscr{C}^{(k)}(E)$ يعني بأن المشتقات الجزئية $D_1 f, \ldots, D_n f$ تنتمي إلى $\mathscr{C}^{(k-1)}(E)$.

أفترض إن $f \in \mathscr{C}^{(k)}(E)$ ، وبين (بتكرار تطبيق المبرهنة ٩، ٤١) بأن المشتقة ذات الدرجة kth

$$D_{i_1 \; i_2 \cdots i_k} f = D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_k} f$$

لا تتغير إذا تم تبديل ترتيب الحروف السفلي $i_1, \ldots, i_k$.

فمثلاً، إذا كان $n \geq 3$، فإن

$$D_{1_2 \; 1_3} f = D_{3_1 \; 1_2} f$$

لكل $f \in C^{(4)}$.

٣٠- لتكن $f \in C^{(m)}(E)$، حيث إن E مجموعة جزئية مفتوحة لـ $\mathbf{R}^n$. قم بتثبيت $\mathbf{a} \in E$، وافترض إن $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ قريبة جداً من 0 بحيث إن النقاط

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{x}$$

تقع في E كلما كانت $0 \leq t \leq 1$. عرف

$$h(t) = f(\mathbf{p}(t))$$

بالنسبة إلى جميع $t \in \mathbf{R}^1$ التي تكون فيها $\mathbf{p}(t) \in E$.

(أ) بالنسبة إلى $1 \leq k \leq m$، بين (بتكرار تطبيق قاعدة التابع) إن

$$h^{(k)}(t) = \sum (D_{i_1 \cdots i_k} f)(\mathbf{p}(t)) x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

يمتد المجموع عبر جميع المضاعفات ألـ kth المرتبة $(i_1, \ldots, i_k)$ والتي تكون فيها كل i_j أحد الأعداد الصحيحة $1, \ldots, n$.

(ب) استناداً إلى مبرهنة تيلور (٥، ١٥)،

$$h(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{h^{(m)}(t)}{m!}$$

لبعض $t \in (0,1)$. استخدم ذلك لبرهنة مبرهنة تيلور في n من المتغيرات وذلك ببيان إن الصيغة

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum (D_{i_1 \cdots i_k} f)(\mathbf{a}) x_{i_1} \ldots x_{i_k} + r(\mathbf{x})$$

تمثل $f(\mathbf{a} + \mathbf{x})$ لمجموعة لما يسمى "مفكوكها التيلوري للدرجة $m-1$" إضافة إلى المتبقي الذي يحقق

$$\lim_{\mathbf{x} \to 0} \frac{r(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^{m-1}} = 0$$

كل من المجموعات الداخلية يمتد عبر جميع المضاعفات ألـ kth المرتبة $(i_1, \ldots, i_k)$، كما في الجزء (أ)؛ وكما هو مألوف، فإن المشتقة ذات الدرجة –

صفر لـ f هي ببساطة f، لذلك فإن الحد الثابت لمفكوك تيلور لـ f في $\mathbf{a}$ هو $f(\mathbf{a})$.

(ج) يبين التمرين ٢٩ بأن التكرار يحدث في مفكوك تيلور كما مكتوب في الجزء (ب). على سبيل المثال، D_{113} يحدث ثلاثة مرات، بهيئة $D_{113}, D_{131}, D_{311}$. بالإمكان كتابة مجموع الحدود الثلاثة المتناظرة بالشكل

$$3(D_1^2 D_3 f)(\mathbf{a}) x_1^2 x_3 .$$

برهن (باحتساب عدد مرات حدوث كل مشتقة) بأنه بالإمكان كتابة مفكوك تيلور في (ب) على شكل

$$\sum \frac{(D_1^{s_1} \dots D_n^{s_n} f)(\mathbf{a})}{s_1! \dots s_n!} x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$$

هنا يمتد الجمع عبر جميع المضاعفات النونية المرتبة $(s_1, \dots, s_n)$ بحيث إن لكل عدداً صحيحاً غير سالباً

s_i، و $s_1 + \dots + s_n \le m - 1$.

٣١- أفترض إن $f \in C^{(3)}$ في بعض المناطق المجاورة للنقطة $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^2$، ميل f يساوي صفر في النقطة $\mathbf{a}$، ولكن ليس كل مشتقات الدرجة الثانية لـ f تساوي صفر في $\mathbf{a}$. بين كيفية تحديد واحد من مفكوك تيلور لـ f في $\mathbf{a}$ (للدرجة ٢)، فيما إذا كانت f تمتلك قيمة قصوى محلية، أو دنيا محلية، أو لا، عند النقطة $\mathbf{a}$.

وسع ذلك إلى $\mathbf{R}^n$ بدلاً من $\mathbf{R}^2$.

الفصل العاشر

تكامل الصيغ القابلة للتفاضل

- التكامل
- التطبيقات الأولية
- تجزئة الوحدة
- تغيير المتغيرات
- الصيغ القابلة للتفاضل
- المفردات و السلاسل
- مبرهنة ستوك
- الصيغ المغلقة و الصيغ الدقيقة
- تحليل المتجه
- تمارين

الفصل العاشر
تكامل الصيغ القابلة للتفاضل
Integration Of Differential Forms

بالإمكان دراسة التكامل وفق مستويات متعددة، في الفصل السادس تم، توسيع النظرية بالنسبة إلى الدوال ذات السلوك المعتدل تقريباً في المجالات الفرعية للخط الحقيقي. في الفصل الحادي عشر سوف نتناول نظرية التكامل بمستوى عالي جداً وبالنحو الذي نستطيع بموجبه تطبيقها على أصناف اكبر بكثير من الدوال، التي تكون انطلاقتها مجموعات عشوائية بشكل أو بآخر، وليس بالضروري أن تكون مجموعات جزئية لـ R^n. سوف نخصص الفصل الحالي لتناول تلك الحالات من نظرية التكامل المرتبطة ارتباطاً وثيقاً بهندسة الفضاءآت الإقليدية، مثل صيغة تغيير المتغيرات، متكاملات الخط، والأداة المتعلقة بالصيغ القابلة لتفاضل التي تستخدم في نص وبرهان النظير النوني الأبعاد للبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل، وبالتحديد مبرهنة ستوك **Stokes' theorem**.

التكامل Integration

١٠، ١ تعريف: لنفترض إن I^k الخلية ألـ kth في R^k، التي تتألف من جميع

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$$

بحيث أن

$$a_i \le x_i \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, k), \qquad (١)$$

I^j هي الخلية – j في R^j المعرفة بالمتباينات j الأولى (١)، و f دالة حقيقية مستمرة في I^k.

ضع $f = f_k$، وعرف f_{k-1} على I^{k-1} بـ

$$f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)\,dx_k .$$

تبين الاستمرارية المنتظمة لـ f_k في I^k بأن f_{k-1} مستمرة في I^{k-1}.

إذن نستطيع تكرار هذه الطريقة للحصول على الدوال f_j، المستمرة في I^j، بحيث أن f_{j-1} هي المتكامل لـ f_j، بالاستناد إلى x_j، عبر $[a_j, b_j]$. بعد k من الخطوات نصل إلى *العدد* **number** f_0، والذي نسميه *متكامل f فوق* I^k؛ ***integral of f over*** I^k ؛ والذي نكتبه على شكل

$$\int_{I^k} f \qquad \text{أو} \qquad \int_{I^k} f(\mathbf{x})dx \ .$$

من البديهي، إن هذا التعريف للمتكامل يعتمد على الترتيب الذي تتم به عمليات التكامل الـ k. على الرغم من ذلك، فإن هذا الاعتماد هو في الواقع ظاهرياً ليس إلا. لبرهنة ذلك، لنقدم الآن الرمز المؤقت $L(f)$ بالنسبة للمتكامل (٢) و $L'(f)$ بالنسبة للنتيجة التي نحصل عليها بعد عمليات التكامل الـ k بترتيب آخر.

١٠، ٢ مبرهنة: *لكل* $f \in \mathcal{C}(I^k)$ ، $L(f) = L'(f)$.

البرهان: إذا كانت $h(\mathbf{x}) = h_1(x_1)\ldots h_k(x_k)$، حيث أن $h_j \in \mathcal{C}\left(\left[a_j, b_j\right]\right)$، عندها فإن

$$L(h) = \prod_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)dx_i = L'(h) \ .$$

إذا كانت $\mathcal{A}$ مجموعة جميع المجموعات المنتهية لمثل هذه الدوال h، فإن ذلك يؤدي إلى أن $L(g) = L'(g)$ لجميع $g \in \mathcal{A}$. وكذلك فإن $\mathcal{A}$ هي جبراً للدوال في I^k والتي تطبق فيها مبرهنة ستون – ويرستراس **Stone - Weierstrass**.

ضع $V = \prod_1^k (b_i - a_i)$. إذا كانت $f \in \mathcal{C}(I^k)$ و $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك $g \in \mathcal{A}$ بحيث أن $\|f - g\| < \varepsilon / V$، حيث أن $\|f\|$ معرف بالشكل $\max|f(\mathbf{x})| \ (\mathbf{x} \in I^k)$.
عندها فإن $|L(f-g)|, |L'(f-g)| < \varepsilon$، وبما أن

$$L(f) - L'(f) = L(f-g) + L'(g-f),$$

فإننا نستنتج بأن $|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon$.

من المفيد الرجوع إلى التمرين ٢ في هذا المجال.

١٠، ٣ تعريف: تعرف *الدعامة* ***support*** للدالة f (الحقيقية أو المركبة) في $\mathbb{R}^k$ بأنها الانغلاق للمجموعة التي تضم جميع النقاط $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ التي تكون عندها $f(x) \neq 0$. إذا كانت f دالة مستمرة بدعامة متراصة، ولتكن I^k إي خلية – k التي تحتوي الدعامة لـ f، وعرف

$$\int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{I^k} f \ . \qquad (٣)$$

من الواضح أن المتكامل المعرف بهذه الطريقة لا يعتمد عل اختيار I^k، شرطه فقط أن يكون I^k تحتوي على دعامة **support** لـ f.

هذا هو الوقت المناسب لتوسيع تعريف المتكامل فوق R^k للدوال التي تكون غايات (بمعناه أو بآخر) لدوال مستمرة بدعامة متراصة. لا نريد هنا أن نناقش الشروط التي نستطيع بموجبها القيام بذلك، حيث أن الإطار المناسب لهذه المسألة هو متكامل لبيك. سوف نقوم فقط بتقديم مثال بسيط جداً والذي سنستخدمه في برهان مبرهنة ستوك.

١٠، ٤ مثال: لتكن Q^k المفرد الـ k - **simplex** k الذي يتألف من جميع النقاط $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ في R^k التي يكون فيها $x_1 + \cdots + x_k \le 1$ و $x_i \ge 0$ بالنسبة إلى $i = 1, \dots, k$. إذا كانت $k =: 3$، على سبيل المثال، فإن Q^k تكون رباعية السطوح برؤوس تقع في $0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. إذا كانت $f \in \mathscr{C}(Q^k)$، ابسط f إلى دالة في I^k بوضع $f(\mathbf{x}) = 0$ خارج Q^k، وعرف

$$\int_{Q^k} f = \int_{I^k} f \ . \qquad (٤)$$

هنا I^k هي "مكعب الوحدة" "**unit cube**" المعرفة بـــ

$$(1 \le i \le k) \qquad 0 \le x_i \le 1 .$$

بما أنه من الجائز أن تكون f غير مستمرة في I^k، فإن المسألة وجود المتكامل في الطرف الأيمن من (٤) بحاجة إلى البرهنة. كما وأننا نود أيضاً أن نبين أن هذا التكامل لا يعتمد على الترتيب الذي يتم به إجراء عمليات التكامل الفردية k.

للقيام بذلك، أفترض أن $0 < \delta < 1$، ضع

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & (t \le 1-\delta) \\ \dfrac{(1-t)}{\delta} & (1-\delta < t \le 1) \\ 0 & (1 < t), \end{cases} \qquad (٥)$$

وعرف

$$F(\mathbf{x}) = \varphi(x_1 + \cdots + x_k) f(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in I^k) \ . \qquad (٦)$$

عندها فإن $F \in \mathscr{C}(I^k)$.

ضع $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, x_k), \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_{k-1})$، بالنسبة إلى كل $\mathbf{y} \in I^{k-1}$، فإن مجموعة جميع x_k بحيث أن $F(\mathbf{y}, x_k) \ne f(\mathbf{y}; x_k)$ تكون إما خالية أو تكون مقطعاً لا يتجاوز طوله δ. بما أن $0 \le \varphi \le 1$ فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$(٧) \qquad |F_{k-1}(\mathbf{y}) - f_{k-1}(\mathbf{y})| \le \delta \|f\| \qquad (\mathbf{y} \in I^{k-1}) \ ,$$

حيث تمتلك $\|f\|$ نفس المعنى المذكور ببرهان المبرهنة ١٠، ٢ ، و f_{k-1}, F_{k-1} كما مذكورين في التعريف ١٠، ١.

عندما $\delta \to 0$ فإن (٧) تظهر f_{k-1} كغاية منتظمة لمتتالية من الدوال المستمرة. لذلك فإن $f_{k-1} \in \mathcal{C}(I^{k-1})$ ، ولا توجد هنالك أية مشاكل بخصوص إجراء تكاملات إضافية.

إن هذا يبرهن وجود المتكامل (٤). إضافة لذلك، فإن (٧) تبين أن

$$(٨) \qquad \left| \int_{I^k} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{I^k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \le \delta \|f\|.$$

لاحظ بأن (٨)صحيحة، بغض النظر عن الترتيب الذي تتم فيه إجراء عمليات التكامل الفردية. k. بما أن $F \in \mathcal{C}(I^k)$ ، فإن $\int F$ لا يتأثر بأي تغيير في هذا الترتيب. إذن تبين (٨) بأن نفس الشيء بالنسبة إلى $\int f$.

وهذا ينهي البرهان.

ينصب اهتمامنا الآن على التغير في صيغة المتغيرات المذكورة في المبرهنة ١٠، ٩. وبغية تسهيل برهانها، سوف نناقش أولاً ما يطلق على تسميته الأولية **primitive mapping**، وتجزئيات الوحدة. إن التطورات الأولية سوف تمكننا من التوصل إلى صورة أوضح للتصرف المحلي للتطبيق $\mathcal{C}'$ ذو المشتقة القابلة للعكس، وتعتبر عملية تجزئي الوحدة أداة مفيدة جداً نتمكن بواسطتها استخدام المعلومات المحليـــة بإطار شامل.

التطبيقات الأولية Primitive Mappings

١٠، ٥ تعريف: إذا كانت G تطبيق المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}^n$، وإذا كان يوجد هنالك عدداً صحيحاً m ودالة حقيقية g بمنطلق E بحيث أن

$$(٩) \qquad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_{i \ne m} x_i \mathbf{e}_i + g(\mathbf{x}) \mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x} \in E)$$

عندها فإننا نطلق على G أولياً *primitive*. لذلك فإن التطبيق الأولي هو التطبيق الذي يغير على الأكثر إحداثيا واحداً. لاحظ بأنه من الممكن أيضاً كتابة (٩) بالشكل الآتي

$$(١٠) \qquad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + [g(\mathbf{x}) - x_m] \mathbf{e}_m \ .$$

إذا كانت g قابلة للتفاضل في بعض النقاط $\mathbf{a} \in E$ ، كذلك G أيضاً. تمتلك المصفوفة

$\left[\alpha_{ij}\right]$ للمؤثر $\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ الصف

$$(D_1 g)(\mathbf{a}),\ldots,(D_m g)(\mathbf{a}),\ldots,(D_n g)(\mathbf{a}) \tag{١١}$$

كصف **m th**. بالنسبة إلى $j \neq m$، لدينا $\alpha_{jj} = 1$ و $\alpha_{ij} = 0$ إذا كان $i \neq j$. لذلك فإن الجاكوبي لــ $\mathbf{G}$ في $\mathbf{a}$ يتمثل بــ

$$J_{\mathbf{G}}(\mathbf{a}) = \det\left[\mathbf{G}'(\mathbf{a})\right] = (D_m g)(\mathbf{a}) \ , \tag{١٢}$$

ونلاحظ (استناداً إلى المبرهنة ٩، ٣٦) بأن $\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ *يكون قابلاً للعكس إذا وإذا فقط كانت* $(D_m g)(\mathbf{a}) \neq 0$.

١٠، ٦ تعريف: سوف نطلق على المؤثر الخطي B في $\mathbf{R}^n$ الذي يبادل بعض الأزواج من أعضاء الأساس القياسي ويترك الأعضاء الآخرين ثابتين بــ*القالب* ***flip***.

على سبيل المثال، القالب B في $\mathbf{R}^n$ الذي يبادل $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_4$ يمتلك الشكل

$$B(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_4 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_2 \tag{١٣}$$

أو، بشكل مكافئ،

$$B(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4) = x_1\mathbf{e}_1 + x_4\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_2\mathbf{e}_4 . \tag{١٤}$$

إذن بالإمكان أيضاً التفكير بــ B كتبادل لأثنين من الإحداثيات، بدلاً من أساسين متجهين اثنين.

في البرهان القادم، سوف نستخدم المسا قط $p_0,\ldots,p_n$ في $\mathbf{R}^n$، المعرف بــ $P_0\mathbf{x} = 0$ و

$$P_m\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m \tag{١٥}$$

بالنسبة إلى $1 \le m \le n$. لذلك فإن P_m هي المسا قط الذي يكون مداه وفضاءه الخامد ممتدان عبر

$\left\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m\right\}$ و $\left\{\mathbf{e}_{m+1},\ldots,\mathbf{e}_n\right\}$، على التوالي.

١٠، ٧ مبرهنة: لنفترض إن $\mathbf{F}$ تطبيقاً $-\mathscr{C}'$ للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في $\mathbf{R}^n$، $0 \in E$، $\mathbf{F}(0) = 0$، $\mathbf{F}'(0)$ قابلاً للعكس.

عندها يوجد هنالك جوار لــ 0 في $\mathbf{R}^n$ والذي يتحقق عنده التمثيل

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = B_1 \cdots B_{n-1}\mathbf{G}_n \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) \tag{١٦}$$

في (١٦)، يكون كل $\mathbf{G}_i$ تطبيقاً $-\mathscr{C}'$ أولياً في بعض المناطق المجاورة لــ 0؛

$\mathbf{G}'_i(0), \mathbf{G}_i(0) = 0$ قابلاً للعكس، وتكون B_i إما قالباً أو المؤثر المحايد.

وبصورة مختصرة، تمثل (١٦) $\mathbf{F}$ محلياً كمركب من التطبيقات الأولية والقوالب.

البرهان: ضع $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$. افترض إن $1 \le m \le n-1$، وافترض الفرضيات الاستقرائية الآتية (والتي من الواضح أنها تتحقق بالنسبة إلى $m = 1$):

V_m هو جوار لــ 0، $\mathbf{F}_m \in \mathscr{C}'(V_m)$، $\mathbf{F}'_m(0), \mathbf{F}_m(0) = 0$ قابلة للعكس، و

$$P_{m-1}\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = P_{m-1}\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V_m)\ . \tag{١٧}$$

استنادا إلى (١٧)، لدينا

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = P_{m-1}\mathbf{x} + \sum_{i=m}^{n} \alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\ , \tag{١٨}$$

حيث أن $\alpha_m, \ldots, \alpha_n$ دوالاً $-\mathscr{C}'$ حقيقية في V_m. إذن

$$\mathbf{F}'_m(0)\mathbf{e}_m = \sum_{i=m}^{n} \left(D_m\alpha_i\right)(0)\mathbf{e}_i\ . \tag{١٩}$$

بما أن $\mathbf{F}'_m(0)$ قابلاً للعكس، فإن الجانب الأيسر من (١٩) لا يساوي 0، ولذلك يوجد هنالك k بحيث أن $m \le k \le n$ و $\left(D_m\alpha_k\right)(0) \ne 0$.

لتكن B_m القالب الذي يبادل m و هذا الــ k (إذا كان $m = k$، فإن B_m هي المحايد) وعرف

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + [\alpha_k(\mathbf{x}) - x_m]\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x} \in V_m). \tag{٢٠}$$

عندها فإن $\mathbf{G}_m \in \mathscr{C}'(V_m)$، $\mathbf{G}_m$ أولية، و $\mathbf{G}'_m(0)$ قابلة للعكس، نظراً لأن $\left(D_m\alpha_k\right)(0) \ne 0$.

لذلك تبين مبرهنة الدالة العكسية بأنه يوجد هنالك مجموعة مفتوحة U_m، بــ $0 \in U_m \subset V_m$، بحيث أن $\mathbf{G}_m$ تطبيقاً 1-1لــ U_m في V_{m+1} لــ 0، التي تكون فيها $\mathbf{G}_m^{-1}$ قابلة للتفاضل ومشتقاتها مستمرة. عرف $\mathbf{F}_{m+1}$ بــ

$$\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y}) = B_m\mathbf{F}_m \circ \mathbf{G}_m^{-1}(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in V_{m+1})\ . \tag{٢١}$$

عندها فإن $\mathbf{F}_{m+1} \in \mathscr{C}'(V_{m+1})$، $\mathbf{F}_{m+1}(0) = 0$، و $\mathbf{F}'_{m+1}(0)$ تكون قابلة للعكس (استناداً إلى قاعدة التابع). كذلك، بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in U_m$،

$$P_m\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) = P_mB_m\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) \tag{٢٢}$$

$$= P_m\left[P_{m-1}\mathbf{x} + \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m + \cdots\right]$$
$$= P_{m-1}\mathbf{x} + \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m$$
$$= P_m\mathbf{G}_m(\mathbf{x})$$

لذلك فإن

$$P_m\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y}) = P_m\mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \in V_{m+1}) \ . \qquad (٢٣)$$

لذلك فإن فرضياتنا الاستمرارية تتحقق بوضع $m+1$ بدلاً من m.

في (٢٢)، استخدمنا أولاً (٢١)، ثم (١٨) وتعريف B_m، ثم تعريف P_m، وأخيراً (٢٠).]

بما أن $B_mB_m = I$، فإن (٢١)، مع $\mathbf{y} = \mathbf{G}_m(\mathbf{x})$، تكون مكافئة لـ

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = B_m\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in U_m). \qquad (٢٤)$$

إذا طبقنا هذا بالنسبة لـ $m = 1,\ldots,n-1$، فإننا نحصل بالتوالي على

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = B_1\mathbf{F}_2 \circ \mathbf{G}_1$$
$$= B_1B_2\mathbf{F}_3 \circ \mathbf{G}_2 \circ \mathbf{G}_1 = \cdots$$
$$= B_1 \cdots B_{n-1}\mathbf{F}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1$$

في بعض المناطق المجاورة لـ $\mathbf{0}$. (استناداً إلى (١٧)، فإن $\mathbf{F}_n$ أولية. وهذا ينهي البرهان.

تجزئة الوحدة Partitions Of Unity

١٠، ٨ مبرهنة: لنفترض إن K مجموعة جزئية متراصة لـ $\mathbf{R}^n$، و $\{V_\alpha\}$ غطاءاً مفتوحاً لـ K. عندها توجد هنالك دوالاً $\psi_1,\ldots,\psi_s \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$ بحيث أن

(أ) $0 \le \psi_i \le 1$ بالنسبة إلى $1 \le i \le s$ ؛

(ب) يمتلك كل ψ_i دعامته في بعض V_α، و

(ج) $\psi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \psi_s(\mathbf{x}) = 1$ لكل $\mathbf{x} \in K$.

بسبب (ج)، يطلق على $\{\psi_i\}$ *مجزأ الوحدة partition of unity*، وأحياناً يعبر عن (ب) بالقول إن $\{\psi_i\}$ *تابع subordinate* للغطاء $\{V_\alpha\}$.

نتيجة: *إذا كانت $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$، والدعامة لـ f تقع في K، فإن*

$$f = \sum_{i=1}^{s} \psi_i f \ . \qquad (٢٥)$$

كل $\psi_i f$ تمتلك دعامتها في بعض V_α.

النقطة التي تقدمها (٢٥) هي تمثيلا لــ f كمجموع للدوال المستمرة $\psi_i f$ بدعامة صغيرة.

البرهان: أرفق مع كل $\mathbf{x} \in K$ المؤشر $\alpha(\mathbf{x})$ بحيث أن $\mathbf{x} \in V_{\alpha(\mathbf{x})}$. عندها يوجد هنالك كرتان مفتوحتان $B(\mathbf{x})$ و $W(\mathbf{x})$، متمركزة في $\mathbf{x}$، بــ

$$\overline{B(\mathbf{x})} \subset W(\mathbf{x}) \subset \overline{W(\mathbf{x})} \subset V_{\alpha(x)} \ . \tag{٢٦}$$

بما أن K متراصة، يوجد هنالك النقاط $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$ في K بحيث أن

$$K \subset B(\mathbf{x}_1) \cup \cdots \cup B(\mathbf{x}_s) \ . \tag{٢٧}$$

استناداً إلى (٢٦) يوجد هنالك الدوال $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$، بحيث أن $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ في $B(\mathbf{x}_i)$, $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ خارج $W(\mathbf{x}_i)$ و $0 \le \varphi_i(\mathbf{x}) \le 1$ في $\mathbf{R}^n$. عرف $\psi_1 = \varphi_1$ و

$$\psi_{i+1} = (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i)\varphi_{i+1} \tag{٢٨}$$

بالنسبة إلى $i = 1, \ldots, s-1$.

الخاصتين (أ) و (ب) واضحتين. العلاقة

$$\psi_1 + \cdots + \psi_i = 1 - (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_i) \tag{٢٩}$$

عديمة الأهمية بالنسبة إلى $i = 1$. إذا كانت (٢٩) تتحقق بالنسبة لبعض $i < s$، فإن جمع (٢٨) و(٢٩) ينتج (٢٩) بــ $i+1$ بدلاً من i. يؤدي ذلك إلى أن

$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{s} [1 - \varphi_i(\mathbf{x})] \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n). \tag{٣٠}$$

إذا كانت $\mathbf{x} \in K$، فإن $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i)$ بالنسبة لبعض i، إذن $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$، والناتج في (٣٠) يساوي 0. وهذا يبرهن (ج).

تغيير المتغيرات Change Of Variables

نستطيع الآن أن نصف التأثير الذي يحمله تغيير المتغيرات على التكامل المركب. ولأجل التبسيط، سنمدد أنفسنا هنا بالتعامل مع الدوال المستمرة ذات الدعامة المتراصة، على الرغم من أن ذلك يعتبر تمديداً كبيراً للعديد من التطبيقات. يتم توضيح ذلك في التمارين من ٩ إلى ١٣.

١٠ ، ٩ مبرهنة: *لنفترض أن T تطبيقاً $\mathcal{C}'$ – 1-1 للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^k$ في $\mathbf{R}^k$.*

بحث أن $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$ *لجميع* $\mathbf{x} \in E$. *إذا كانت* f *الدالة المستمرة في* R^k *التي دعامتها متراصة وتقع في* $T(E)$*، فإن*

$$\int_{\mathsf{R}^k} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\mathsf{R}^k} f(T(\mathbf{x}))\left|J_T(\mathbf{x})\right|d\mathbf{x}. \tag{٣١}$$

نسترجع هنا بأن J_T هو الجاكوبي لـ T. يؤدي الافتراض بأن $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$، استناداً إلى مبرهنة الدالة العكسية، إلى أن T^{-1} مستمرة في $T(E)$، وهذا يضمن أن الكمية المطلوب تكاملها في الجانب الأيمن من (٣١) تمتلك دعامة متراصة في E (المبرهنة ٤، ١٤).

قد يستدعي ظهور *القيمة المطلقة لـ* $J_T(\mathbf{x})$ ***absolute value of*** في (٣١) إلى بعض التعليق. لنأخذ الحالة التي تكون فيها $k = 1$، ونفترض أن T تطبيقاً– $\mathscr{C}'$ 1-1الـ R^1 في R^1. عندها فإن $J_T(x) = T'(x)$؛ وإذا كانت T *متزايدة* ***increasing***، لدينا

$$\int_{\mathsf{R}^1} f(y)dy = \int_{\mathsf{R}^1} f(T(x))T'(x)dx, \tag{٣٢}$$

استناداً إلى المبرهنة ٦، ١٩ و ٦، ١٧ ، لجميع f المستمرة ذات الدعامة المتراصة. ولكن إذا كانت T متناقصة، فإن $T'(x) < 0$؛ وإذا كانت f موجبة في المنطقة الداخلية لدعامتها، فإن الجانب الأيسر من (٣٢) يكون موجباً والجانب الأيمن سالباً. لذلك يتم الحصول على العلاقة الصحيحة إذا استبدلت T' بـ $|T'|$ في (٣٢).

إن النقطة هي أن المتكاملات التي ندرسها الآن هي متكاملات لدوال فوق المجموعات الجزئية لـ R^k، وإننا لا نرفق أي اتجاه أو توجيه مع هذه المجموعات الجزئية. سوف نتبنى وجهة نظر مختلفة عندما نتناول تكامل الصيغ القابلة للتفاضل فوق السطوح.

البرهان: نستنتج من الملاحظات التي وضعناها تواً أن (٣١) صحيحة إذا كانت T تطبيقاً – $\mathscr{C}'$ أولياً (راجع التعريف ١٠، ٥)، وتبين المبرهنة ١٠، ٢ أن (٣١) صحيحة إذا كانت T تطبيقاً خطياً يستبدل إحداثيتين اثنين فقط.

إذا كانت المبرهنة صحيحة بالنسبة إلى التحويليين P, Q، وإذا كانت $S(\mathbf{x}) = P(Q(\mathbf{x}))$، فإن

$$\begin{aligned}\int f(\mathbf{z})d\mathbf{z} &= \int f(P(\mathbf{y}))\left|J_P(\mathbf{y})\right|d\mathbf{y}\\ &= \int f(P(Q(\mathbf{x})))\left|J_P(Q(\mathbf{x}))\right|\left|J_Q(\mathbf{x})\right|d\mathbf{x}\\ &= \int f(S(\mathbf{x}))\left|J_S(\mathbf{x})\right|d\mathbf{x},\end{aligned}$$

بما أن

$$J_P(Q(\mathbf{x}))J_Q(\mathbf{x}) = \det P'(Q(\mathbf{x}))\det Q'(\mathbf{x})$$
$$= \det P'(Q(\mathbf{x}))Q'(\mathbf{x}) = \det S''(\mathbf{x}) = J_S(\mathbf{x}),$$

استناداً إلى مبرهنة الضرب المحددات وقاعدة التتابع. لذلك فإن المبرهنة صحيحة أيضاً بالنسبة إلى S.

كل نقطة $\mathbf{a} \in E$ تمتلك جوار $U \subset E$ الذي تكون فيها

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{a}) + B_1 \cdots B_{k-1}\mathbf{G}_k \circ \mathbf{G}_{k-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a}), \qquad (٣٣)$$

حيث أن $\mathbf{G}_i$ و B_i كما معرفين في المبرهنة ١٠، ٧. إن وضع $V = T(U)$، يؤدي إلى أن (٣١) تتحقق إذا كانت الدعامة لـ f تقع في V. لذلك فإن :

كل نقطة $\mathbf{y} \in T(E)$ تقع في المجموعة المفتوحة $V_{\mathbf{y}} \subset T(E)$ بحيث أن (٣١) تتحقق لجميع الدوال المستمرة التي تقع دعامتها في $V_{\mathbf{y}}$.

الآن لتكن f دالة مستمرة بدعامة متراصة $K \subset T(E)$. بما أن $\{V_{\mathbf{y}}\}$ تغطي K، فإن نتيجة المبرهنة ١٠، ٨ تبين أن $f = \sum \psi_i f$، حيث أن كل ψ_i مستمرة، وكل ψ_i تمتلك دعامتها في بعض $V_{\mathbf{y}}$. إذن فإن (٣١)تتحقق $\psi_i f$، وإذن، كذلك لمجموعها f.

الصيغ القابلة للتفاضل Differential Forms

سنبدأ الآن بتطوير بعض الآليات التي نحتاجها للنسخة ذات الأبعاد النونية للمبرهنة الأساسية للتفاضل والتكامل، والتي غالباً ما يطلق عليها ***مبرهنة ستوك Stokes' theorem***. ظهرت الصيغة الأصلية لمبرهنة ستوك في تطبيقات التحليل المتجه على الأكترومغناطيسية وكان نص المبرهنة بحدود الملف للمجال المتجه. تعتبر ***مبرهنة كرين Green's theorem*** و***مبرهنة التباعد divergence theorem*** حالات خاصة أخرى. يتم مناقشة هذه المواضيع بصورة مختصرة في نهاية الفصل.

من الملفت للنظر بخصوص مبرهنة ستوك إن الشيء الوحيد المعقد بنصوصها هو البناء المعقد للتعاريف اللازمة لنصها. تتعلق هذه التعاريف بالصيغ القابلة للتفاضل، مشتقاتها، قيودها، واتجاهاتها. حال استيعاب هذه المفاهيم، فإن نص المبرهنة هو في الواقع مختصر جداً وموجز ولا يعتبر برهاناً معقداً بكل معنى الكلمة.

لنهاية الوقت الحاضر، فإننا قمنا بدراسة مشتقات الدوال ذات المتغيرات المتعددة فقط

بالنسبة للدوال المعرفة في المجموعات *المفتوحة* *open*. تم ذلك لتجنب المشاكل التي قد تحدث في نقاط الحدود. لذلك فإنه من الملائم الآن، دراسة الدوال القابلة للتفاضل في المجموعات *المتراصة* *compact*. لذلك فإننا سنتبنى الاصطلاح الآتي :

إن قولنا f تطبيقاً – $\mathscr{C}'$ (أو تطبيقاً – $\mathscr{C}''$) للمجموعة المتراصة $D \subset \mathbf{R}^k$ في $\mathbf{R}^n$ يعني أن هنالك تطبيقاً – $\mathscr{C}'$ (أو تطبيقاً – $\mathscr{C}''$) g للمجموعة المفتوحة $W \subset \mathbf{R}^k$ إلى $\mathbf{R}^n$ بحيث أن $D \subset W$ وبحيث أن $\mathbf{g(x) = f(x)}$ بالنسبة لجميع $\mathbf{x} \in D$.

١٠، ١٠ تعريف: لنفترض أن E مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^n$. *السطح* –k *k-surface* في E هو التطبيق – $\mathscr{C}'$ Φ من المجموعة المتراصة $D \subset \mathbf{R}^k$ في E.

يسمى D *المنطلق الوسيط* لــ Φ *parameter domain of* Φ. سوف نرمز إلى نقاط D بــ $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$.

سوف نختصر تعاملنا بالحالة البسيطة التي تكون فيها D إما خلية –k *k -cell* أو المفرد –k *k-simplex* Q^k الموصوف في المثال ١٠، ٤. إن السبب في ذلك يرجع إلى أننا سيتوجب علينا التكامل عبر D، ولم نتناول لحد الآن مسألة التكامل عبر مجموعة جزئية اكثر تعقيداً لــ $\mathbf{R}^k$. سوف نلاحظ أن هذا التحديد المفروض على D (والذي سنفرضه ضمنياً من الآن فصاعداً) سوف لا يؤدي إلى خسارة تذكر في عمومية نظرية الصيغ القابلة للتفاضل التي سنتوصل إليها.

نؤكد هنا أن السطوح –k في E معرفة بأنها *تطبيقات في* E، *mappings into E* ، وليس في المجموعة الجزئية لــ E. إن هذا يتحقق مع تعريفنا السابق للمنحنيات (التعريف ٦، ٢٦). وفي الحقيقة، فإن السطوح –1 هي بالضبط نفس المنحنيات القابلة للتفاضل ومشتقاتها مستمرة.

١٠، ١١ تعريف: لنفترض أن E مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^n$. *الصيغة القابلة للتفاضل ذات الدرجة* $k \geq 1$ في E (باختصار، *الصيغة*–k في E) هي الدالة ω، التي تمثل رمزياً بالمجموع

$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \qquad (٣٤)$$

(تمتد الحروف " الأدلة " " indices " $i_1,\dots,i_k$ بصورة مستقلة من 1 إلى n)، والذي يعين لكل سطح-k Φ في E العدد $\omega(\Phi)=\int_\Phi \omega$، استناداً إلى القاعدة

$$\int_\Phi \omega = \int_D \sum a_{i_1 \cdots i_k}(\Phi(\mathbf{u}))\frac{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots u_k)}d\mathbf{u}, \qquad (٣٥)$$

حيث أن D هي المنطلق الوسيط لـــ Φ.

يفترض بأن الدوال $a_{i_1,\dots,i_k}$ حقيقية ومستمرة في E. إذا كانت $\phi_1,\dots,\phi_n$ مكونات Φ، فإن الجاكوبي في (٣٥) هو الجاكوبي المحدد بالتطبيق

$$(u_1,\dots,u_k)\to(\phi_{i_1}(\mathbf{u}),\dots,\phi_{i_k}(\mathbf{u})) \ .$$

لاحظ بأن الجانب الأيمن من (٣٥) هو متكاملاً عبر D، كما معرف بالتعريف ١٠، ١ (أو المثال ١٠، ٤) وبأن (٣٥) هي التعريف *definition* للرمز $\int_\Phi \omega$.

يقال الصيغة -k ω بأنها من الصنف C' أو C'' إذا كانت جميع الدوال $a_{i_1,\dots,i_k}$ في (٣٤) من الصنف C' أو C''.

تعرف الصيغة -0 في E بأنها دالة مستمرة في E.

١٠، ١٢ أمثلة:

(أ) لتكن γ سطح -1 (منحني بصف C') في $\mathbb{R}^3$، بمنطلق الوسيط $[0,1]$.

أكتب (x,y,z) بمحل (x_1,x_2,x_3)، وضع

$$\omega = xdy + ydx \ .$$

عندها فإن

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 [\gamma_1(t)\gamma_2'(t)+\gamma_2(t)\gamma_1'(t)]dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1)-\gamma_1(0)\gamma_2(0) \ .$$

لاحظ بأن $\int_\gamma \omega$ في هذا المثال تعتمد فقط على النقطة الابتدائية $\gamma(0)$ وعلى النقطة النهائية $\gamma(1)$ لـــ γ. وعلى وجه الخصوص، $\int_\gamma \omega = 0$ لكل منحني مغلق γ. (كما سنشاهد فيما بعد، فإن هذا يصبح لكل صيغة-1 ω والتي هي *دقيقة* أو *مضبوطة* *exact*).

غالباً ما يطلق على المتكاملات ذات الصيغة-1 *المتكاملات الخطية* *line integrals*.

(ب) قم بتثبيت $a>0$ ، $b>0$، وعرف

$$,\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

لذلك فإن γ منحني مغلق في $\mathbf{R}^2$. (يكون مداها المقطع الناقص **ellips**). عندها فإن

$$\int_\gamma x dy = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t dt = \pi ab,$$

بينما

$$\int_\gamma y dx = -\int_0^{2\pi} ab\sin^2 t dt = -\pi ab.$$

لاحظ بأن $\int_\gamma x dy$ هي مساحة المنطقة المحددة بـــ γ. إن هذه هي الحالة خاصة لمبرهنة كرين *Green's theorem*.

(ج) لتكن D الخلية-3 **3-cell** المعرفة بـــ

$$0 \le r \le 1 \ , \quad 0 \le \theta \le \pi \ , \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

عرف $\Phi(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$ ، حيث

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta.$$

عندها فإن

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta.$$

إذن

$$\int_\Phi dx \wedge dy \wedge dz = \int_D J_\Phi = \frac{4\pi}{3}. \qquad (٣٦)$$

لاحظ بأن Φ تطبيق D في وحدة الكرة المغلقة لـــ $\mathbf{R}^3$، وبأن التطبيق هو **1-1** في المنطقة الداخلية لـــ D (ولكن بعض النقاط الحدودية معرفة بـــ Φ)، وبأن المتكامل (٣٦) يساوي حجم $\Phi(D)$.

١٠، ١٣ خصائص أولية Elementary Properties

لتكن $\omega, \omega_1, \omega_2$ الصيغ-k في E. نكتب $\omega_1 = \omega_2$ إذا وإذا فقط كانت $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$ لكل سطح-k Φ في E على وجه الخصوص، $\omega = 0$ يعني أن $\omega(\Phi) = 0$ لكل سطح-k Φ في E. إذا كانت c عدداً حقيقياً، فإن $c\omega$ هي الصيغة-k المعرفة بـــ

$$\int_{\Phi} c\omega = c\int_{\Phi}\omega, \qquad (٣٧)$$

و $\omega = \omega_1 + \omega_2$ يعني بأن

$$\int_{\Phi}\omega = \int_{\Phi}\omega_1 + \int_{\Phi}\omega_2 \qquad (٣٨)$$

لكل سطح-k Φ في E. كحالة خاصة لـ (٣٧)، لاحظ بأن ω - معرفة بحيث أن

$$\int_{\Phi}(-\omega) = -\int_{\Phi}\omega. \qquad (٣٩)$$

لاحظ الصيغة -k

$$\omega = a(\mathbf{x})dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \qquad (٤٠)$$

ولتكن $\bar{\omega}$ الصيغة -k التي نحصل عليها باستبدال زوج ما من الرموز السالفة في (٤٠)، إذا تم دمج (٣٥) و(٣٩)مع كون إن المحددة تغير إشارتها إذا تم استبدال اثنين من صفوفها، فإننا نلاحظ بأن

$$\bar{\omega} = -\omega. \qquad (٤١)$$

كحالة خاصة لذلك، لاحظ بأن العلاقة التبادلية المضادة ***anticommutative relation***

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \qquad (٤٢)$$

تتحقق لجميع i وj. وعلى وجه الخصوص،

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n). \qquad (٤٣)$$

بشكل أكثر عمومية، لنرجع إلى (٤٠)، ونفترض إن $i_r = i_s$ بالنسبة إلى بعض $r \neq s$. إذا تم استبدال هذين الحرفين السابقين، فإن $\omega = \bar{\omega}$، إذن $\omega = 0$، استناداً إلى (٤١).

بكلمة أخرى، إذا كانت ω متمثلة بـ (٤٠)، فإن $\omega = 0$ إلا إذا كانت جميع الحروف السالفة $i_1,\ldots,i_k$ متميزة.

إذا كانت ω كما في (٣٤)، فيمكن حذف المجموعات ذات الحروف السالفة المكررة بدون تغير ω.

يؤدي ذلك إلى أن 0 هي الصيغة -k الوحيدة في أي مجموعة جزئية لـ R^n، إذا كانت $k > n$.

إن الاهتمام الكبير الذي أُولي للإشارات السالبة عند دراسة الصيغ القابلة للتفاضل يعزى إلى التبادلية المضادة المعبر عنها في (٤٢).

١٠، ١٤ الصيغ –k الأساسية Basic k-forms: إذا كانت $i_1,\dots,i_k$ أعداد صحيحة بحيث أن $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$، وإذا كانت I المضاعف – k المرتب $\{i_1,\dots,i_k\}$، عندها نطلق على I *الدليل –k المتزايد* ***increasing k-index***، ونستخدم الرمز المختصر

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{٤٤}$$

إن هذه الصيغ dx_I هي التي يطلق عليها *الصيغ –k الأساسية في* ***Basic k-forms in*** $\mathbf{R}^n$.

ليس بالصعب إثبات أنه يوجد هنالك بالضبط $n!/k!(n-k)!$ صيغ –k أساسية في $\mathbf{R}^n$؛ على الرغم من إننا سوف لا نستخدم هذه النقطة، في نقا شاتنا.

إن الحقيقة الأكثر أهمية لنا هي أنه بالإمكان تمثيل كل صيغة –k بحدود الصيغ –k الأساسية. لملاحظة ذلك، لاحظ بأن كل مضاعف –k $\{J_1,\dots,J_k\}$ للأعداد الصحيحة المتميزة يمكن تحويله إلى دليل –k متزايد J بواسطة عدد منتهى من متبادلات الأزواج؛ كل منها يؤدي إلى الضرب في 1 -، كما لاحظنا ذلك في البند ١٠، ١٣؛ إذن

$$dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = \varepsilon(j_1,\dots,j_k)dx_J \tag{٤٥}$$

حيث أن $\varepsilon(j_1,\dots,j_k)$ تساوي 1 أو 1 - بالاستناد إلى عدد التبادلات اللازمة. في الحقيقة، من السهل ملاحظة أن

$$\varepsilon(j_1,\dots,j_k) = s(j_1,\dots,j_k) \tag{٤٦}$$

حيث أن s كما في التعريف ٩، ٣٣.

على سبيل المثال،

$$dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5.$$

و

$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

إذا تم تحويل كل مضاعف –k في (٣٤) إلى دليل –k متزايد، فإننا نحصل على ما يسمى *التمثل القياسي لـــ* ω ***standard presentation of*** ω:

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x})dx_I. \tag{٤٧}$$

عند الجمع في (٤٧) عبر جميع الدلائل k- المتزايدة I. [من الطبيعي أن كل دليل k- متزايد يتأتى من العديد من (من $k!$ على وجه التحديد) المضاعفات- k. لذلك فإن كل b_I في (٤٧) قد تكون مجموعاً للعديد من المعادلات التي تقع في (٣٤)].

على سبيل المثال،

$$x_1 dx_2 \wedge dx_1 - x_2 dx_3 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

صيغة -٢ في $\mathbb{R}^3$ التي تمثيلها القياسي هو

$$(1-x_1)dx_1 \wedge dx_2 + (x_2 + x_3)dx_2 \wedge dx_3 .$$

إن مبرهنة الوحدانية الآتية هي أحد الأسباب الرئيسية لتقديم التمثيل القياسي للصيغة- k.

١٠، ١٥ مبرهنة: *افترض*

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I \tag{٤٨}$$

هي التمثيل القياسي للصيغة - k ω *في المجموعة المفتوحة* $E \subset \mathbb{R}^n$. *إذا كانت* $\omega = 0$ *في* E، *فإن* $b_I(\mathbf{x}) = 0$ *لكل دليل* - k *متزايد* I *ولكل* $\mathbf{x} \in E$.

لاحظ بأن النص المماثل سيكون خاطئاً بالنسبة للمجموعات مثل تلك المذكورة في (٣٤)، نظراً لأنه، على سبيل المثال،

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 = 0 .$$

البرهان: بغية التوصل إلى تناقض، أفترض، إن $b_J(\mathbf{v}) > 0$ بالنسبة لبعض $\mathbf{v} \in E$ ولبعض الأدلة k- المتزايدة $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$. بما أن b_J مستمرة، يوجد هنالك $h > 0$ بحيث أن $b_J(\mathbf{x}) > 0$ لكل $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ التي تحقق إحداثياتها $|x_i - v_i| \le h$. لتكن D الخلية - k في $\mathbb{R}^k$ بحيث أن $\mathbf{u} \in D$ إذا وإذا فقط كانت $|u_r| \le h$ بالنسبة إلى $r = 1, \ldots, k$. عرف

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{v} + \sum_{r=1}^{k} u_r \mathbf{e}_{j_r} \qquad (\mathbf{u} \in D) . \tag{٤٩}$$

عندها فإن Φ هي السطح -k في E، بالمنطلق الوسيط D، و $b_J(\Phi(\mathbf{u})) > 0$ لكل $\mathbf{u} \in D$.

أننا ندعي بأن

$$\int_\Phi \omega = \int_D \quad b_J(\Phi(\mathbf{u})) \; d\mathbf{u} . \tag{٥٠}$$

وبما أن الجانب الأيمن من (٥٠) موجباً، فإن ذلك يؤدي إلى إن $\omega(\Phi) \neq 0$. إذن (٥٠) تقدم

التناقض الذي نريده.

لبرهنة (٥٠)، نطبق (٣٥) على التمثيل (٤٨). بصورة أكثر دقة، أحتسب الجاكوبين الذي يحدث في (٣٥). استناداً إلى (٤٩)،

$$\frac{\partial(x_{j_1},\dots x_{j_k})}{\partial(u_1,\dots,u_k)}=1 \quad .$$

بالنسبة إلى إي دليل k - متزايد آخر $J \neq I$، فإن الجاكوبين هو 0، نظراً لأنة المحددة للمصفوفة التي فيها على الأقل صفاً واحداً من الأصفار.

١٠، ١٦ حاصل ضرب الصيغ - k الأساسية

Products of basic k- forms

أفترض إن

$$I=\{i_1,\dots,i_p\}, \qquad J=\{j_1,\dots,j_q\} \tag{٥١}$$

حيث $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ و $1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n$. إن *حاصل الضرب* ***product*** للصيغ الأساسية dx_I و dx_J في R^n، والتي يرمز لها بالرمز $dx_I \wedge dx_J$، وتعرف بـ

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_q} \quad . \tag{٥٢}$$

إذا كانت I وJ تمتلكان عنصراً مشتركاً، فإن النقاش في ١٠، ١٣ يبين إن $dx_I \wedge dx_J = 0$.

إذا كانت I و J لا تمتلكان عنصراً مشتركاً، لنكتب $[I,J]$ بالنسبة للدليل - $(p+q)$ المتزايد والذي نحصل علية بترتيب عناصر $I \cup J$ بترتيب متزايد. عندها فإن $dx_{[I,J]}$ هوَ صيغة - $(p+q)$ أساسية. إننا ندعي بأن

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^{\alpha} dx_{[I,J]} \tag{٥٣}$$

حيث أن α هي عدد الفرو قات $j_t - i_s$ السالبة. (لذلك فإن عدد الفروقات الموجبة هو $pq-\alpha$).

لبرهنة (٥٣)، نقوم بالعمليات الآتية على الأعداد

$$i_1,\dots,i_p; j_1,\dots,j_q \quad . \tag{٥٤}$$

حرك i_p إلى اليمين، خطوة، حتى يكون جوارها الأيسر أقل من i_p. إن عدد الخطوات هو عدد الحروف السفلى t بحيث أن $i_p < j_t$. (لاحظ بأن 0 من الخطوات هو احتمال وارد). بعدها افعل نفس الشيء بالنسبة إلى $i_{p-1},\dots,i_1$. إن مجموع الخطوات التي نقوم بها هو α. إن

الترتيب النهائي الذي نصل أليه هو $[I, J]$. كل خطوة، نقوم بها في الجانب الأيمن من (٥٢)، تضرب $dx_I \wedge dx_J$ بـــ 1-. لذلك (٥٣) تتحقق.

لاحظ إن الجانب الأيمن من (٥٣) هو التمثيل القياسي لـــ $dx_I \wedge dx_J$.

الخطوة التالية، لتكن $k = (k_1, \ldots, k_r)$ دليل - r متزايد في $\{1, \ldots, n\}$. سوف نستخدم (٥٣) لبرهنة إن

$$(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K) \quad . \qquad (٥٥)$$

إذا كان إي أثنين من المجموعات K,J,I تمتلكان عنصراً مشتركاً، فإن كل جانب من (٥٥) يساوي صفر، وإذن فهما متساويتان.

لذلك نفترض إن K,J,I منفصلة زوجيا. لتكن $[I, J, K]$ ترمز إلى الدليل - $(p+q+r)$ المتزايد الذي نحصل علية من اتحادهما. أرفق β مع الزوج المرتب (J, K) و γ هو الزوج المرتب (I, K) بالطريقة التي أرفقت فيها α مع (I, J) في (٥٣). لذلك فإن الجانب الأيسر لـــ (٥٥) هو

$$(-1)^{\alpha} dx_{[I,J]} \wedge dx_K = (-1)^{\alpha}(-1)^{\beta+\gamma} dx_{[I,J,k]}$$

وذلك بتطبيقين أثنين لـــ (٥٣)، والجانب الأيمن لـــ(٥٥) هو

$$(-1)^{\beta} dx_I \wedge dx_{[J,K]} = (-1)^{\beta}(-1)^{\alpha+\gamma} dx_{[I,J,k]} \quad .$$

إذن (٥٥) صحيحة.

١٠، ١٧ الضرب Multiplication

لنفترض إن ω و λ هما الصيغتين - p وq، على التوالي، في بعض المجموعات المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$، بالتمثيلات القياسية

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I, \qquad \lambda = \sum_J c_J(\mathbf{x}) dx_J \qquad (٥٦)$$

حيث تمتد I و J عبر جميع الدلائل - p المتزايدة وعبر جميع الدلائل - q المتزايدة المأخوذة من المجموعة $\{1, \ldots, n\}$.

إن حاصل ضربهما، الذي نرمز له بالرمز $\omega \wedge \lambda$، معرف بـــ

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{I,J} b_I(\mathbf{x}) c_J(\mathbf{x}) dx_I \wedge dx_J \quad . \qquad (٥٧)$$

في هذا المجموع، تمتد I و J *باستقلاليتها* عبر قيمهما الممكنة، و $dx_I \wedge dx_J$ كما في الجزء ١٠،

١٦. لذلك فإن $\omega \wedge \lambda$ تكون صيغة – $(p+q)$ في E.

من السهل جداً (وسنترك تفاصيل ذلك كتمرين) أن نلاحظ أن القانونين التوزيعيين

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$$

و

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2)$$

يتحققان وفق تعريف الجمع المذكور في البند ١٠، ١٣. إذا تم ربط هذين القانونين التوزيع مع (٥٥) فإننا نحصل على قانون التجميع

$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma) \tag{٥٨}$$

بالنسبة إلى الصيغ العشوائية ω, λ, σ في E.

أفترض في هذه النقاشات ضمنياً أن $p \geq 1$ و $q \geq 1$. إن حاصل ضرب الصيغة– f 0 بـ الصيغة – p ω المقدم في (٥٦) هو ببساطة معرف بأنه الصيغة - p

$$f\omega = \omega f = \sum_I f(\mathbf{x}) b_I(\mathbf{x}) dx_I .$$

من المعتاد كتابة $f\omega$، بدلاً من $f \wedge \omega$، عندما تكون f صيغة – 0.

١٠، ١٨ التفاضل Differentiation: سوف نعرف الآن مؤثر التفاضل d الذي يعين الصيغة –$(k+1)$ $d\omega$ لكل صيغة –k ω ذات الصنف $\mathscr{C}'$ في بعض المجموعات المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$

إن الصيغة –0 ذات الصنف $\mathscr{C}'$ في E هي مجرد دالة حقيقية $f \in \mathscr{C}'(E)$، ونعرف

$$df = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x}) dx_i . \tag{٥٩}$$

إذا كانت $\omega = \sum b_I(\mathbf{x}) dx_I$ التمثيل القياسي للصيغة – k ω، و $b_I \in \mathscr{C}'(E)$ لكل دليل –k متزايد I، عندها فإننا نعرف

$$d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I . \tag{٦٠}$$

١٠، ١٩ مثال: أفترض أن E مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^n$، $f \in \mathscr{C}'(E)$، و γ منحنياً قابلاً للتفاضل و مشتقاتها مستمرة في E، بمنطلق $[0,1]$. استناداً إلى (٥٩) و(٣٥)،

$$\int_\gamma df = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt . \tag{٦١}$$

استناداً إلى قاعدة التابع، فإن المقدار الأخير المطلوب تكامله هو $(f \circ \gamma)'(t)$. إذن

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)), \tag{٦٢}$$

ونلاحظ أن $\int_\gamma df$ هو نفسه لجميع γ بنفس النقطة الأولية ونفس نقطة النهاية، كما في (أ) من المثال ١٠، ١٢.

لذلك تبين المقارنة مع المثال ١٠، ١٢ (ب) أن الصيغة -1 $x\,dy$ ليست المشتقة لأي صيغة -0 f. بالإمكان استنتاج ذلك أيضاً من الجزء (ب) من المبرهنة الآتية، نظراً لأن

$$d(x\,dy) = dx \wedge dy \neq 0.$$

١٠، ٢٠ مبرهنة:

(أ) *إذا كانت ω و الصيغة $-k$ و $-m$ على التوالي، للصنف C' في E، فإن*

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda. \tag{٦٣}$$

(ب) *إذا كانت ω من الصنف C'' في E، فإن* $d^2\omega = 0$.

وبالطبع، فإن $d^2\omega$ هنا تعني، $d(d\omega)$.

البرهان: بسبب (٥٧) و (٦٠)، فإن (أ) تستنتج إذا تم برهنة (٦٣) بالنسبة للحالة الخاصة

$$\omega = f dx_I, \qquad \lambda = g dx_J \tag{٦٤}$$

حيث أن $f, g \in C'(E)$، dx_I هي الصيغة $-k$ أساسية، dx_J صيغة $-m$ أساسية. [إذا كانت k و m أو كليهما 0، ببساطة أحذف dx_I أو dx_J في (٦٤)؛ لا يتأثر بهذا، البرهان الذي يعقب ذلك] عندها فإن

$$\omega \wedge \lambda = fg dx_I \wedge dx_J \ .$$

لنفترض إن I و J لا تمتلكان أي عنصراً مشتركاً. [في الحالات الأخرى فإن كل من الحدود الثلاثة في (٦٣) تساوي 0]. عندها، وباستخدام (٥٣)،

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg dx_I \wedge dx_J) = (-1)^\alpha d(fg dx_{[I,J]})$$

استناداً إلى (٥٩)، $d(fg) = fdg + gdf$. إذن تعطينا (٦٠)

$$d(\omega \wedge \lambda) = (-1)^\alpha (fdg + gdf) \wedge dx_{[I,J]}$$
$$= (gdf + fdg) \wedge dx_I \wedge dx_J \, .$$

بما أن dg صيغة -1 و dx_I صيغة $-k$، لدينا

$$dg \wedge dx_I = (-1)^k dx_I \wedge dg,$$

استناداً إلى (٤٢). إذن

$$d(\omega \wedge \lambda) = (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^k (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J)$$
$$= (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda,$$

والتي تبرهن (أ).

لاحظ بأن قانون التجميع (٥٨) قد أستخدم بحرية.

لنقم أولاً ببرهنة (ب) بالنسبة إلى الصيغة $0 -$ $f \in \mathcal{C}''$:

$$d^2 f = d\left(\sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\mathbf{x}) dx_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} d(D_j f) \wedge dx_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j.$$

بما أن $D_{ij} f = D_{ji} f$ (المبرهنة ٩، ٤١) و $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$، فإننا نلاحظ بأن $d^2 f = 0$.

إذا كانت $\omega = f dx_I$، كما في (٦٤)، فإن $d\omega = (df) \wedge dx_I$. وبواسطة (٦٠)، $d(dx_I) = 0$.

إذن تبين (٦٣) بأن

$$d^2\omega = (d^2 f) \wedge dx_I = 0 .$$

١٠، ٢١ تغير المتغيرات Change Of Variables

أفترض إن مجموعة مفتوحة في $T\Phi$، T تطبيق $- \mathcal{C}'$ لـ E في المجموعة المفتوحة $V \subset \mathbf{R}^m$، و ω الصيغة $- k$ في V، التي تمثيلها القياسي هو

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dy_I . \qquad (٦٥)$$

(نستخدم $\mathbf{y}$ بالنسبة لنقاط V و $\mathbf{x}$ بالنسبة لنقاط E).

لتكن $t_1, \ldots, t_m$ مكونات T : إذا كانت

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) = T(\mathbf{x})$$

عندها فإن $y_i = t_i(\mathbf{x})$. كما في (٥٩)،

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} \left(D_j t_i\right)(\mathbf{x}) dx_j \qquad (1 \le i \le m). \qquad (٦٦)$$

لذلك فإن كل dt_i صيغة -1 في E.

يحول التطبيق T ‏ω إلى الصيغة $-k$ ‏ω_T في E، التي تعريفها هو

$$\omega_T = \sum_I b_I\left(T(\mathbf{x})\right) dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}. \qquad (٦٧)$$

في كل جمع في (٦٧)، تكون $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ دليلاً $-k$ متزايداً.

تبين مبرهنتنا الآتية أن جَمع، ضرب وتفاضل الصيغ تكون معرفة بالطريقة التي تتغير مع تغير المتغيرات.

١٠، ٢٢ مبرهنة: *بوضع E و T كما في البند ١٠، ٢١ ، لتكن ω و λ الصيغتين $-k$ و $-m$ في V، على التوالي. عندها فإن*

(أ) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$ *إذا كانت* $k = m$؛

(ب) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$؛

(ج) $d(\omega_T) = (d\omega)_T$ *إذا كانت* ω *من الصنف* C' *و* T *من الصنف* C'' .

البرهان: يستنتج (أ) بصورة مباشرة من التعاريف. (ب) واضحة جداً إذا علمنا أن

$$(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r})_T = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r} \qquad (٦٨)$$

بغض النظر عما إذا كانت $\{i_1, \ldots i_r\}$ متزايدة أم لا؛ فإن (٦٨) تتحقق نظراً لأننا نحتاج إلى نفس العدد من الإشارات السالبة عند كل جانب من (٦٨) لإنتاج إعادة الترتيبات المتزايدة.

نعود الآن لبرهنة (ج). إذا كانت f صيغة -0 من الصنف C' في V، فإن

$$df = \sum_i (D_i f)(\mathbf{y}) dy_i \qquad , f_T(\mathbf{x}) = f(T(\mathbf{x})) \ .$$

استناداً إلى قاعدة التتابع، فإن

$$\begin{aligned} d(f_T) &= \sum_j (D_j f_T)(\mathbf{x}) dx_j \\ &= \sum_j \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x}))(D_j t_i)(\mathbf{x}) dx_j \\ &= \sum_i (D_i f)(T(\mathbf{x})) dt_i \\ &= (df)_T. \end{aligned} \qquad (٦٩)$$

إذا كانت $dy_I = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$، فإن $(dy_I)_T = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}$، وتبين المبرهنة ١٠، ٢٠ بأن

$$d((dy_I)_T) = 0 \qquad (٧٠)$$

(هنا نستخدم الفرضية بأن $T \in \mathscr{C}''$).

نفترض الآن $\omega = f\,dy_I$. عندها فإن

$$\omega_T = f_T(\mathbf{x})(dy_I)_T$$

وتؤدي الحسابات السابقة إلى أن

$$\begin{aligned} d(\omega_T) &= d(f_T) \wedge (dy_I)_T = (df)_T \wedge (dy_I)_T \\ &= ((df) \wedge (dy_I))_T = (d\omega)_T. \end{aligned}$$

تتحقق المساواة الأولى استناداً إلى (٦٣) و (٧٠)، والثاني استناداً إلى (٦٩)، والثالثة استناداً إلى (ب) والأخيرة استناداً إلى تعريف $d\omega$.

تستنتج الحالة العامة لـ (ج) من الحالة الخاصة التي برهناها الآن، إذا طبقنا (أ). وينتهي هذا البرهان.

إن هدفنا القادم هو المبرهنة ١٠، ٢٥. والتي ستعقب مباشرة الخاصيتين التحويليتين المهمتين الأخيرتين للصيغ القابلة للتفاضل واللتين سنذكرهما أولاً.

١٠، ٢٣ مبرهنة: *لنفترض أن T تطبيقاً $-\mathscr{C}'$ للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في المجموعة المفتوحة $V \subset \mathbf{R}^n$، S تطبيقاً $-\mathscr{C}'$ لـ V في المجموعة المفتوحة $W \subset \mathbf{R}^p$، و ω هي الصيغة $-k$ في W، بحيث أن ω_S هي الصيغة $-k$ في V وكلاً من $(\omega_S)_T$ و ω_{ST} صيغتان $-k$ في E، حيث أن ST معرفة بـ $(ST)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$. عندها فإن*

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}. \qquad (٧١)$$

البرهان: إذا كانت ω و λ صيغتان في W، فإن المبرهنة ١٠، ٢٢ تبين أن

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

و

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}$$

لذلك إذا تحققت (٧١) بالنسبة إلى ω و λ، فإن ذلك يؤدي إلى إنها تتحقق(٧١) أيضاً بالنسبة إلى $\omega \wedge \lambda$. بما أنه يمكن بناء كل صيغة من الصيغ -0 والصيغ -1 بعمليات الجمع والضرب، ونظراً لأن (٧١) تصبح عديمة الأهمية بالنسبة إلى الصيغ -0، فإنه يكفي برهنة

(٧١) في الحالة التي تكون فيها $\omega = dz_q$، $q = 1,\ldots,p$. (نرمز للنقاط E,V,W بـ x,y,z على التوالي).

لتكن $t_1,\ldots,t_m$ مكونات T، لتكن $s_1,\ldots,s_p$ مكونات S، ولتكن $r_1,\ldots,r_p$ مكونات ST. إذا كانت $\omega = dz_q$، فإن

$$(\omega_S) = ds_q = \sum_j (D_j s_q)(\mathbf{y})dy_j$$

لذلك فإن قاعدة التتابع تؤدي إلى إن

$$\begin{aligned}(\omega_s)_T &= \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x}))dt_j \\ &= \sum_j (D_j s_q)(T(\mathbf{x}))\sum (D_i t_j)(\mathbf{x})dx_i \\ &= \sum_i (D_i r_q)(\mathbf{x})dx_i = dr_q = \omega_{ST}.\end{aligned}$$

١٠ ، ٢٤ مبرهنة: *لنفترض إن ω صيغة - k في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathsf{R}^n$، Φ سطح - k في E، بمنطلق وسيط $D \subset \mathsf{R}^k$، و Δ هو السطح - k في R^k، بالمنطلق الوسيط D، المعرف بـ $\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{u} \in D)$. فإن*

$$\int_\Phi \omega = \int_\Delta \omega_\Phi \ .$$

البرهان: نحتاج فقط أن نلاحظ الحالة التي تكون فيها

$$\omega = a(\mathbf{x})dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

إذا كانت $\phi_1,\ldots,\phi_n$ مكونات Φ، فإن

$$\omega_\Phi = a((\mathbf{u}))d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} \ .$$

تستنتج المبرهنة إذا استطعنا أن نبين أن

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = J(\mathbf{u})du_1 \wedge \cdots \wedge du_k, \tag{٧٢}$$

حيث أن

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_1})}{\partial(u_1,\ldots,u_k)},$$

نظراً لأن (٧٢) تؤدي إلى أن

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega &= \int_D a(\Phi(\mathbf{u}))J(\mathbf{u})d\mathbf{u} \\ &= \int_\Delta a(\Phi(\mathbf{u})J(\mathbf{u})du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \int_\Delta \omega_\Phi.\end{aligned}$$

لتكن $[A]$ المصفوفة k بـ k بالمدخلات

$$\alpha(p,q)=\left(D_q\phi_{i_p}\right)(\mathbf{u}) \qquad (p,q=1,\dots,k).$$

عندها فإن

$$d\phi_{i_p}=\sum_q \alpha(p,q)du_q$$

لذلك فإن

$$d\phi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\phi_{i_k}=\sum \alpha(1,q_1)\cdots\alpha(k,q_k)du_{q_1}\wedge\cdots\wedge du_{q_k}.$$

في المجموع الأخير، تمتد $q_1,\dots,q_k$ بصورة مستقلة عبر $1,\dots k$. تؤدي العلاقة التبادلية المضادة (٤٢) إلى إن

$$du_{q_1}\wedge\cdots\wedge du_{q_k}=s(q_1,\dots,q_k)du_1\wedge\cdots\wedge du_k,$$

حيث أن s كما في التعريف ٩، ٣٣، بتطبيق هذا التعريف، نلاحظ إن

$$d\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi_{i_k}=\det[A]du_1\wedge\cdots\wedge du_k\,;$$

وبما أن $J(\mathbf{u})=\det[A]$ ، فإن (٧٢) قد تمت برهنتها.

تجمع النتيجة الأخيرة لهذا القسم المبرهنتين السابقتين.

١٠، ٢٥ مبرهنة: *لنفترض إن T تطبيقاً – $\mathscr{C}'$ للمجموعة المفتوحة $E\subset\mathbf{R}^n$ في المجموعة المفتوحة $V\subset\mathbf{R}^m$، Φ سطح – k في E، و ω صيغة – k في V.*

فإن

$$\int_{T\Phi}\omega=\int_{\Phi}\omega_T\ .$$

البرهان: لتكن D المنطلق الوسيط لـ Φ (إذن كذلك لـ $T\Phi$) وعرف Δ كما في المبرهنة ١٠، ٢٤. عندها فإن

$$\int_{T\Phi}\omega=\int_{\Delta}\omega_{T\Phi}=\int_{\Delta}(\omega_T)_{\Phi}=\int_{\Phi}\omega_T\ .$$

المساواة الأولى هي المبرهنة ١٠، ٢٤، مطبقة على $T\Phi$ بدلاً من Φ. تستنتج المساواة الثانية من المبرهنة ١٠، ٢٣. المساواة الثالثة هي المبرهنة ١٠، ٢٤ بوضع ω_T بدل من ω.

المفردات والسلاسل Simplexes And Chains

١٠، ٢٦ المفردات التآلفية Affine simplexes

يقال للتطبيق f الذي يحمل الفضاء المتجه X إلى الفضاء المتجه Y بأنه تآلفي ***affine*** إذا كانت $\mathbf{f} - \mathbf{f}(0)$ خطية. بكلمة أخرى، فإن الشرط هو إن

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(0) + A\mathbf{x} \tag{٧٣}$$

لبعض $A \in L(X,Y)$.

لذلك بالإمكان تحديد التطبيق التآلفي لـــ $\mathbf{R}^k$ في $\mathbf{R}^n$ إذا عرفنا $\mathbf{f}(0)$ و $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i)$ بالنسبة إلى $1 \le i \le k$؛ وكالمعتاد، فإن $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k\}$ هي الأساس القياسي لـــ $\mathbf{R}^k$.

نعرف *المفرد القياسي* ***standard simplex*** Q^k بأنه المجموعة التي تضم جميع $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^k$ التي على شكل

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i \tag{٧٤}$$

بحيث أن $\alpha_i \ge 0$ بالنسبة إلى $i = 1,\ldots,k$ و $\sum \alpha_i \le 1$.

افترض الآن $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_k$ نقاط في $\mathbf{R}^n$. يعرف *التآلف المتجه المفرد* – k ***oriented affine k- simplex***.

$$\sigma = [\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_k] \tag{٧٥}$$

بأنه السطح –k في $\mathbf{R}^k$ بالمنطلق الوسيط Q^k المقدم بالتطبيق التآلفي

$$\sigma(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \tag{٧٦}$$

لاحظ بأن σ تمثل بـــ

$$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{p}_0 \;, \quad \sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i \quad (\textit{for} \quad 1 \le i \le k) \;, \tag{٧٧}$$

وإن

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + A\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in \mathbf{Q}^k) \tag{٧٨}$$

حيث أن $A \in L(\mathbf{R}^k,\mathbf{R}^n)$ و $A\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ بالنسبة إلى $1 \le i \le k$.

إننا نسمي σ متوجهة (موجهة، توجيه) **oriented** لتؤكد أن ترتيب الرؤوس $\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_k$ مأخوذ بنظر الاعتبار. إذا كانت

$$\overline{\sigma} = \left[p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\right], \tag{٧٩}$$

حيث أن $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ هي التبديلات الممكن إجراءها على المجموعة المرتبة $\{0,1,\ldots,k\}$، نستخدم الرمز

$$\overline{\sigma} = s(i_0, i_1, \ldots, i_k)\sigma, \tag{٨٠}$$

حيث أن s هي الدالة المعرفة في التعريف ٩، ٣٣. لذلك فإن $\overline{\sigma} = \pm\sigma$، اعتماداً على فيما إذا كانت $s = 1$ أو $s = -1$. بشكل صارم، بعد إن استخدمنا (٧٥) و (٧٦) كتعريف لــ σ، فإننا يجب أن لا نكتب $\overline{\sigma} = \sigma$ إلا إذا كانت $i_0 = 0, \ldots, i_k = k$، حتى إذا كانت $s(i_0, \ldots, i_k) = 1$؛ إن ما لدينا هنا هو علاقة مكافئة، وليس مساواة. على الرغم من ذلك، لأغراضنا هنا، فإن المبرهنة ١٠، ٢٧ تبين الرمز الذي استخدمناه.

إذا كانت $\overline{\sigma} = \varepsilon\,\sigma$ (باستخدام الاصطلاح أعلاه) وإذا كانت $\varepsilon = 1$، فإننا نقول أن $\overline{\sigma}$ و σ تمتلكان *نفس التوجيه* ***same orientation***؛ إذا كانت $\varepsilon = -1$، فإننا نقول أن $\overline{\sigma}$ و σ تمتلكان *توجيهاً معاكساً* ***opposite orientation***. لاحظ بأننا لم نعرف لحد الآن ما نعنيه بــ "توجيه المنفرد" "**orientation of a simplex**" وإن ما عرفناه هو العلاقة هي "امتلاك نفس التوجيه" "**having the same orientation**".

على الرغم من ذلك، يوجد هنالك حالة واحدة يمكن فيها وبصورة طبيعية تعريف توجيه المنفرد. إن هذا يحدث عندما تكون $n = k$ وعندما تكون المتجهات $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ $(1 \le i \le k)$ *مستقلة* ***independent***. في هذه الحالة، فإن التحويل الخطي A الذي يظهر في (٧٨) يكون قابلاً للعكس، ومحددته (والتي هي نفس الجاكوبي لــ σ) ليست صفراً. عندها يقال لــ σ بأنها توجيهاً *إيجابياً* ***positively*** (*أو سلبياً* ***(or negatively)***) إذا كانت $\det A$ *موجباً* (*أو سالباً*). وعلى وجه الخصوص، فإن المنفردة $\left[0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\right]$ في $\mathbf{R}^k$ المقدمة في التطبيق المحايد، تمتلك توجيهاً موجباً.

لغاية الآن فإننا افترضنا بأن $k \ge 1$. يعرف *المفرد* $- 0$ *الموجه* ***oriented* 0*-simplex*** بأنه نقطة ملحقة بإشارة. إننا نكتب $\sigma = +\mathbf{p}_0$ أو $\sigma = -\mathbf{p}_0$. إذا كانت $\sigma = \varepsilon\,\mathbf{p}_0$ $(\varepsilon = \pm 1)$ وإذا كانت f صيغة -0 (أي دالة حقيقية)، فإننا نعرف

$$\int_\sigma f = \varepsilon f(p_0).$$

$$\int_{\sigma} f = \varepsilon f(p_0).$$

١٠، ٢٧ مبرهنة: *إذا كانت σ مفردة $k-$ مثلثية متجهة في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ وإذا كانت $\bar{\sigma} = \varepsilon\sigma$ فإن*

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \varepsilon \int_{\sigma} \omega \qquad (٨١)$$

لكل صيغة $k-$ ω في E.

البرهان: بالنسبة إلى $k = 0$، فإن (٨١) تستنتج من التعريف السابق. لذلك فإننا نفترض أن $k \geq 1$ و نفترض أن σ مقدمة في (٧٥).

افترض أن $1 \leq j \leq k$، وافترض أننا نحصل على $\bar{\sigma}$ من σ بتبديل $\mathbf{p}_0$ و $\mathbf{p}_j$. عندها فإن $\varepsilon = -1$، و

$$\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in \mathbf{Q}^k),$$

حيث أن B التطبيق الخطي لــ $\mathbf{R}^k$ في $\mathbf{R}^n$ المعرف بــ $B\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_j$، $B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ إذا $i \neq j$. إذا كتبنا $A\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i$ $(1 \leq i \leq k)$، حيث أن A مقدمة بــ (٧٨)، فإن المتجهات العمودية لــ B (أي، المتجهات $B\mathbf{e}_i$) هي

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}_j, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j.$$

إذا قمنا بطرح العمود الــ jth من كل من الأعمدة الأخرى، فسوف لن تتأثر أي من المحددات في (٣٥)، ونحصل على الأعمدة $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_k$. إن هذه تختلف عن أعمدة A فقط في إشارة العمود الــ jth. إذن تتحقق (٨١) بالنسبة إلى هذه الحالة.

الخطوة التالية نفترض أن $0 < i < j \leq k$ وإن $\bar{\sigma}$ نحصل عليها من σ بتبديل $\mathbf{p}_i$ و $\mathbf{p}_j$. عندها فإن $\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + C\mathbf{u}$، حيث تمتلك C نفس الأعمدة كما في A، باستثناء استبدال العمودين الــ ith و الــ jth. مرة أخرى يؤدي ذلك إلى أن (٨١) تتحقق، نظراً لأن $\varepsilon = -1$.

نستنتج الحالة العامة، نظراً لأن كل من المتغيرات الممكن أجراءها على $\{0,1,\ldots,k\}$ هي مكونات للحالتين الخاصتين اللتين تناولناهما الآن.

١٠، ٢٨ السلاسل التآلفية Affine chains: *السلسلة $k-$ التآلفية affine k-*

chaine Γ في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ هي مجموعة للعديد من المفردات $k-$ التآلفية

قد تحدث في Γ بتكرار معين.

إذا كانت Γ كما في أعلاه، وإذا كانت ω صيغة k- في E، تعرف

$$\int_{\Gamma}\omega = \sum_{i=1}^{r}\int_{\sigma_i}\omega. \tag{٨٢}$$

قد ينظر إلى السطح k- Φ في E كدالة منطلقها مجموعة جميع الصيغ k- في E والتي تعين العدد $\int_{\Phi}\omega$ إلى ω. بما أنه بالإمكان جمع دوال القيم الحقيقية (كما في التعريف ٤، ٣)، فإن ذلك يؤيد استخدام الرمز

$$\Gamma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \tag{٨٣}$$

أو، بصورة اكثر اختصاراً،

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i \tag{٨٤}$$

لبيان كون (٨٢) تتحقق لكل صيغة k- ω في E.

تجنباً لأي سوء فهم، نبين بصورة واضحة إن الرموز التي قدمناها في (٨٣) و (٨٠) يجب أن تعامل بحذر. المسألة هي إن كل مفردة k - تآلفية متوجه σ في $\mathbf{R}^n$ هي دالة من ناحيتين، بمنطلقين وبمدايين مختلفين، ونتيجة لذلك فإن وجود إمكانية أن تكون عمليتي الجمع مختلفتين تماماً. في الأصل، تم تعريف σ كدالة قيم - $\mathbf{R}^n$ بمنطلق Q^k؛ نتيجة لذلك، يمكن التعبير عن $\sigma_1 + \sigma_2$ بأنها الدالة σ التي تحدد المتجه $\sigma_1(\mathbf{u})+\sigma_2(\mathbf{u})$ لكل $\mathbf{u} \in Q^k$ عندها لاحظ بأن σ أيضاً مفردة k - تآلفية متوجيه في $\mathbf{R}^n$! إن هذا هو ليس ما قصدناه في (٨٣).

على سبيل المثال، إذا كانت $\sigma_2 = -\sigma_1$ كما في (٨٠) (ما قلناه، إنه إذا كانت σ_1 و σ_2 تمتلكان نفس مجموعة الرؤوس ولكنهما متجهتان عكسياً) وإذا كانت $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2$، فإن $\int_{\Gamma}\omega = 0$ لجميع ω، وقد نعبر عن ذلك بكتابة $\Gamma = 0$ أو $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$. إن هذا لا يعني إن $\sigma_1(\mathbf{u})+\sigma_2(\mathbf{u})$ هي متجه الخمود لـــ $\mathbf{R}^n$.

١٠، ٢٩ القيود Boundaries: بالنسبة إلى $k \geq 1$، يعرف *القيد boundary* للمفردة k- التآلفية المتوجيه

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$$

بأنه السلسلة - $(k-1)$ التآلفية

بأنه السلسلة – $(k-1)$ التآلفية

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\left[\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\ldots,\mathbf{p}_k\right] . \qquad (٨٥)$$

على سبيل المثال، إذا كانت $\sigma = \left[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\right]$، فإن

$$\partial\sigma = \left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\right]-\left[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_2\right]+\left[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1\right]=\left[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1\right]+\left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\right]+\left[\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_0\right],$$

والتي تتطابق مع الرمز المألوف للقيد المتوجيه للمثلث.

بالنسبة إلى $1 \le j \le k$، لاحظ بأن المفردة $\sigma_j = \left[\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\ldots,\mathbf{p}_k\right]$ التي تحدث في (٨٥) تمتلك Q^{k-1} كمنطلق وسيط وبأنها معرفة بـ

$$\sigma_j(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^{k-1}) , \qquad (٨٦)$$

حيث أن B التطبيق الخطي من $\mathbf{R}^{k-1}$ إلى $\mathbf{R}^n$ المحدد بـ

$B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 \quad \Leftarrow \quad$ إذا كانت $(1 \le i \le j\text{-}1)$

$.B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_0 \quad \Leftarrow \quad$ إذا كانت $(j \le i \le k-1)$

المفردة
$$\sigma_0 = \left[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\ldots,\mathbf{p}_k\right],$$

والتي تحدث في (٨٥)، والتي تعطي بالتطبيق

$$\sigma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_1 + B\mathbf{u},$$

حيث أن $B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_1$ بالنسبة إلى $1 \le i \le k-1$.

١٠، ٣٠ السلاسل والمفردات القابلة للتفاضل Differentiable simplexes and chains

لتكن T تطبيقاً – C'' للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ في المجموعة المفتوحة $V \subset \mathbf{R}^m$؛ ليست بالضرورة أن تكون واحد – لـ – واحد. إذا كانت σ مفردة – k تآلفية متوجيهة في E، فإن التطبيق المركب $\Phi = T \circ \sigma$ (والتي سنكتبها أحياناً بالشكل المبسط $T\sigma$) يكون سطحاً – k في V، بمنطلق وسيط Q^k. نسمي Φ *مفردة – k متوجيهه من الصنف C''* (*simplex of class k- oriented C''*).

تسمى المجموعة المحدودة Ψ المؤلفة من المفردات – k المتوجيهة $\Phi_1,\ldots,\Phi_r$ من الصنف C'' في V السلسلة – k من الصنف C'' في V. إذا كانت ω من الصيغة – k في V، نعرف

ونستخدم الترميز المقابل $\Psi = \sum \Phi_i$.

إذا كانت $\Gamma = \sum \sigma_i$ سلسلة متآلفة، وإذا كانت $\Phi_i = T \circ \sigma_i$، فإننا نكتب أيضاً $\Psi = T \circ \Gamma$، أو

$$T(\sum \sigma_i) = \sum T\sigma_i \quad . \tag{٨٨}$$

يعرف القيد $\partial \Phi$ للمفردة-k المتوجيه $\Phi = T \circ \sigma$ بأنة السلسلة $(k-1)$

$$\partial\Phi = T(\partial\sigma) \quad . \tag{٨٩}$$

تبريراً لـــ (٨٩)، لاحظ بأنه إذا كانتT متآلفة، فإن $\Phi = T \circ \sigma$ هي مفردة k- متآلفة متوجيهه، وهي الحالة التي لا تكون فيها (٨٩) مسألة تعريف، ولكنها في الحقيقة تعتبر نتيجة لـــ (٨٥). لذلك فإن (٨٩) تعمم هذه الحالة الخاصة.

مباشرة تكون $\partial\Phi$ من الصنف C'' إذا كان هذا يصح على Φ.

أخيراً، فأننا نعرف الحد $\partial \Psi$ للسلسلة k- $\Psi = \sum \Phi_i$ بأنه السلسلة $(k-1)$

$$\partial \Psi = \sum \partial \Phi_i \quad . \tag{٩٠}$$

١٠، ٣١ القيود المتوجيهة إيجابياً Positively Oriented Boundaries

لغاية الآن قمنا بمرافقة القيود للسلاسل، وليس للمجموعات الجزئية لـــ $\mathbf{R}^n$. إن هذا المفهوم للقيد هو بالضبط الأكثر ملائمة لنص وبرهان مبرهنة ستوك. على الرغم من ذلك، من الناحية التطبيقية، خاصة في $\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$ فمن المألوف والملائم التحدث حول "الحدود المتوجهية" "oriented boundaries" لبعض الجاميع أيضاً. سنقوم الآن بوصف ذلك بصورة موجزة.

لتكن Q^n المفرد القياسي في $\mathbf{R}^n$، لتكن σ_0 التطبيق الحايد بالمنطلق Q^n. كما لاحظنا في الجزء ١٠، ٢٦، فإن σ_0 قد تعتبر مفردة n - متوجهية إيجابياً في $\mathbf{R}^n$. قيدها $\partial\sigma_0$ هو سلسلة $(n-1)$ متآلفة. تسمى هذه السلسلة ***حداً متوجيهاً إيجابياً للمجموعة*** Q^n.

. Positively oriented boundary of the set Q^n

فمثلاً، القيد المتوجيهه الإيجابي لـــ Q^3 هو

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] - [0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] - [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$$

$$\left[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right]-\left[0,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\right]+\left[0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3\right]-\left[0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\right]$$

الآن لتكن T تطبيقاً 1-1 لـ Q^n في $\mathbf{R}^n$، من الصنف C'' ، الذي يمتلك جاكوبياً موجباً (على الأقل في المنطقة الداخلية في Q^n). لتكن $E=T(Q^n)$. استنادا إلى مبرهنة الدالة العكسية، فإن E هي المنغلق لمجموعة جزئية مفتوحة لـ $\mathbf{R}^n$. نعرف القيد المتوجيهه إيجابياً للمجموعة E بأنه السلسلة - $(n-1)$

$$\partial T=T(\partial\sigma_0),$$

وقد نرمز لهذه السلسلة - $(n-1)$ بـ ∂E .

يثار هنا استفسارا واضحاً وهو : إذا كانت $E=T_1(Q^n)=T_2(Q^n)$، وإذا كان كل من T_1 و T_2 يمتلك جاكوبياً موجباً، هل صحيح إن $\partial T_1=\partial T_2$ ؟ أي أنة نقول هل تتحقق المساواة

$$\int_{\partial T_1}\omega=\int_{\partial T_2}\omega$$

لكل صيغة - $(n-1)$ ω ؟ إن الجواب هو نعم، ولكننا سوف نحذف البرهان. (كمثال على ذلك، قارن نهاية هذا الجزء مع التمرين ١٧).

بالإمكان التعمق أكثر في هذه المسألة. لتكن

$$\Omega=E_1\cup\cdots\cup E_r,$$

حيث أن $E_i=T_i(Q^n)$، كل T_i تمتلك خواص T (أعلاه، والمناطق الداخلية للمجاميع E_i تكون منفصلة زوجياً. عندها فإن السلسلة - $(n-1)$

$$\partial T_1+\cdots+\partial T_r=\partial\Omega$$

تسمى القيد متوجيهة إيجابياً لـ Ω.

على سبيل المثال، فإن وحدة التوزيع I^2 في $\mathbf{R}^2$ هي الاتحاد لـ $\sigma_1(\mathbf{Q}^2)$ و $\sigma_2(\mathbf{Q}^2)$، حيث

$$\sigma_1(\mathbf{u})=\mathbf{u},\qquad \sigma_2(\mathbf{u})=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{u}.$$

كل من σ_1 و σ_2 تمتلك جاكوبياً $1>0$. بما أن

$$\sigma_1=\left[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\right],\quad \sigma_2=\left[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\right]$$

لدينا

$$\partial\sigma_1=\left[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\right]-\left[\mathbf{0},\mathbf{e}_2\right]+\left[\mathbf{0},\mathbf{e}_1\right],$$
$$\partial\sigma_2=\left[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\right]-\left[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1\right]+\left[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\right];$$

إن مجموع هذين القيدين هو

القيد التوجيه إيجابياً لـ I^2. لاحظ بأن $[e_1, e_2]$ تحذف $[e_2, e_1]$.

إذا كانت Φ سطحاً -2 في $\mathbf{R}^m$، بمنطلق وسيط I^2، فإن Φ (على اعتبار أنها دالة في صيغتين -2) هي نفس السلسلة -2

$$\Phi \circ \sigma_1 + \Phi \circ \sigma_2 .$$

لذلك فإن

$$\begin{aligned}\partial \Phi &= \partial(\Phi \circ \sigma_1) + \partial(\Phi \circ \sigma_2)\\ &= \Phi(\partial \sigma_1) + \Phi(\partial \sigma_2) = \Phi(\partial I^2).\end{aligned}$$

بكلمة أخرى، إذا كان المنطلق الوسيط لـ Φ هو المربع I^2، فإننا لا نحتاج إلى الرجوع إلى المنفردة $\mathbf{Q}^2$، لأننا نستطيع الحصول على $\partial \Phi$ مباشرة من ∂I^2.

كأمثلة أخرى على ذلك راجع التمارين ١٧ إلى ١٩.

١٠، ٣٢ مثال: بالنسبة إلى $0 \le u \le \pi \;,\; 0 \le v \le 2\pi$، عرف

$$\sum(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

عندها فإن $\sum$ تكون السطح -2 في $\mathbf{R}^3$ الذي منطلقه الوسيط المستطيل $D \subset \mathbf{R}^2$، والذي مداه الكرة الواحدة في $\mathbf{R}^3$. قيده هو

$$\partial \Sigma = \Sigma(\partial D) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

حيث

$$\begin{aligned}\gamma_1(u) &= \sum(u, 0) = (\sin u, 0, \cos u),\\ \gamma_2(v) &= \sum(\pi, v) = (0, 0, -1),\\ \gamma_3(u) &= \sum(\pi - u, 2\pi) = (\sin u, 0, -\cos u),\\ \gamma_4(v) &= \sum(0, 2\pi - v) = (0, 0, 1),\end{aligned}$$

بـ $[0, \pi]$ و $[0, 2\pi]$ كفترتين وسطيتين بالنسبة إلى u و v، على التوالي.

بما إن γ_2 و γ_4 ثابتين، فإن مشتقتيهما تساوي صفر، إذن فإن المتكامل لأي صيغة -1 فوق γ_2 و γ_4 هو صفر. [راجع المثال ١٠، ١٢ (أ)].

بما إن $\gamma_3(u) = \gamma_1(\pi - u)$، فإن التطبيق المباشر لـ (٣٥) يبين إن

$$\int_{\gamma_3} \omega = -\int_{\gamma_1} \omega$$

لكل صيغة -1 ω. لذلك فإن $\int_{\partial\Sigma} \omega = 0$، ونستنتج بأن $\partial \sum = 0$.

(بالمصطلح الجغرافي، $\partial \sum$ تبدأ عند القطب الشمالي N، تمتد إلى القطب الجنوبي S عبر

خط الطول، وأخيراً تتوقف عند N. العبور ين عبر خط الطول يكونان باتجاهين متعاكسين. لذلك فإن الخطين المتكاملين المقابلين يلغي كلٍ منهما الآخر. في التمرين ٣٢ يوجد أيضاً منحنياً واحداً يحدث مرتين في القيد، ولكن بدون إلغاء).

مبرهنة ستوك Stoks' Theorem

١٠، ٣٣ مبرهنة: *إذا كانت Ψ سلسلة $-k$ من الصنف C'' في المجموعة المفتوحة $V \subset \mathbf{R}^m$ وإذا كانت ω صيغة $-(k\text{-}1)$ من الصنف $-C'$ في V، فإن*

$$\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega \quad . \tag{٩١}$$

إن الحالة التي تكون فيها $k = m = 1$ هي ليست سوى المبرهنة الأساسية للتفاضل والتكامل (بافتراض إضافي حول القابلية على التفاضل). الحالة التي تكون فيها $k = m = 2$ هي مبرهنة كرين **Green's theorem**، وتعطينا الحالة التي تكون فيها $k = m = 3$ ما يسمى "مبرهنة التباعد" **"divergence theorem"** لـ كاوس **Gauss**. إن الحالة التي تكون $k = 2$، $m = 3$ هي الحالة التي اكتشفت في بادئ الأمر من قبل ستوك **Stokes**، (تقدم كتاب سيبفاك **Spivak's book** عرضاً للخلفية التاريخية للموضوع) سيصار إلى دراسة المزيد حول هذه الحالات الخاصة في نهاية الفصل.

البرهان: يكفي أن نبرهن أن

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega \tag{٩٢}$$

لكل مفردة $-k$ متوجيه Φ من الصنف C'' في V. وذلك إذا تم برهنة (٩٢) وإذا كانت $\Psi = \sum \Phi_i$، فإن (٨٧) و(٨٩) تدل على (٩١).

قم بتثبيت مثل هذه ألـ Φ وضع

$$\sigma = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] \ . \tag{٩٣}$$

لذلك فإن σ مفردة $-k$ متآلفة متوجيهه بمنطلق وسيط Q^k معرف بالتطبيق المحايد. بما أن Φ معرفة في Q^k أيضاً (راجع التعريف ٣٠، ١٠) و $\Phi \in C''$، يوجد هنالك مجموعة مفتوحة $E \subset \mathbf{R}^k$ التي تضم Q^k، ويوجد هنالك تطبيقاً $-C''$ T لـ E في V بحيث أن $\Phi = T \circ \sigma$. استناداً إلى المبرهنتين ١٠، ٢٥ و ١٠، ٢٢ (ج)، فإن الجانب الأيسر من (٩٢) يكون مساوياً إلى

$$\int_{T\sigma} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} d(\omega_T)$$

تطبيق آخر للمبرهنة ١٠، ٢٥ يبين، استناداً إلى (٨٩)، بأن الجانب الأيمن من (٩٢) هو

$$\int_{\partial(T\sigma)} \omega = \int_{T\partial(\sigma)} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega_T .$$

بما أن ω_T هي صيغة –(k -1) في *E*، فإننا *نلاحظ أنه لبرهنة* (٩٢) *فإننا نحتاج فقط أن نبين أن*

$$\int_{\sigma} d\lambda = \int_{\partial\sigma} \lambda \qquad (٩٤)$$

بالنسبة للمفردة الخاصة (٩٣) *ولكل صيغة* –) k -1) λ *من الصنف* $\mathcal{C}'$ في *E*.

إذا كانت $k = 1$، فإن تعريف المفردة –0 المتوجيهه يبين أن (٩٤) تؤكد فقط بأن

$$\int_0^1 f'(u)du = f(1) - f(0) \qquad (٩٥)$$

بالنسبة لكل دالة قابلة للتفاضل ومشتقتها مستمرة f في $[0,1]$، والذي يصح استناداً إلى المبرهنة الأساسية للتفاضل والتكامل.

من الآن فصاعداً فإننا سنفترض أن $k > 1$، عيّن العدد الصحيح r $(1 \le r \le k)$، واختار $f \in \mathcal{C}'(E)$. عندها فإنه يكفي برهنة (٩٤) بالنسبة إلى الحالة

$$\lambda = f(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \qquad (٩٦)$$

بما أن كل صيغة – $(k - 1)$ هي مجموعة فبهذه الحالات الخاصة بالنسبة إلى $r = 1,\ldots,k$.

استناداً إلى (٨٥)، فإن قيد المفردة (٩٣) هو

$$\partial\sigma = [\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k] + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \tau_i$$

حيث أن

$$\tau_i = [\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\ldots,\mathbf{e}_k]$$

بالنسبة إلى $i = 1,\ldots,k$، ضع

$$\tau_0 = [\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{r-1},\mathbf{e}_{r+1},\ldots,\mathbf{e}_k] .$$

لاحظ بأننا نحصل على τ_0 من $[\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k]$ بـ $r-1$ استبدالات متعاقبة لـ $\mathbf{e}_r$ ومجاوراتها اليسرى. لذلك فإن

$$\partial\sigma = (-1)^{r-1}\tau_0 + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \tau_i \quad . \tag{٩٧}$$

كل τ_i تمتلك Q^{k-1} كمنطلق وسيط.

إذا كانت $\mathbf{x} = \tau_0(\mathbf{u})$ و $\mathbf{u} \in Q^{k-1}$، فإن

$$x_j = \begin{cases} u_j & (1 \le j < r), \\ 1-(u_1+\cdots+u_{k-1}) & (j=r), \\ u_{j-1} & (r < j \le k). \end{cases} \tag{٩٨}$$

إذا كانت $1 \le i \le k$، $\mathbf{u} \in Q^{k-1}$ و $\mathbf{x} = \tau_i(\mathbf{u})$، فإن

$$x_j = \begin{cases} u_j & (1 \le j < i), \\ 0 & (j=r), \\ u_{j-1} & (\mathrm{i} < j \le k). \end{cases} \tag{٩٩}$$

بالنسبة إلى $0 \le i \le k$، لتكن J_i الجاكوبي للتطبيق

$$(u_1,\ldots,u_{k-1}) \to (x_1,\ldots,x_{r-1},x_{r+1},\ldots,x_k) \tag{١٠٠}$$

المستنتج من قبل τ_i، عندما تكون $i=0$ وعندما $i=r$، فإن (٩٨) و (٩٩) تبينان بأن (١٠٠) هي التطبيق المحايد. لذلك فإن $J_r = 1, J_0 = 1$. بالنسبة إلى i الأخرى، فإن حقيقة كون $x_i = 0$ في (٩٩) تبين أن J_i يمتلك صفاً من الأصفار، إذن $J_i = 0$. لذلك فإن

$$\int_{\tau_i} \lambda = 0 \qquad (i \ne 0, i \ne r), \tag{١٠١}$$

استنادا إلى (٣٥) و(٩٦). نتيجة لذلك، فإن (٩٧) تعطي

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \lambda &= (-1)^{r-1}\int_{\tau_0} \lambda + (-1)^r \int_{\tau_r} \lambda \\ &= (-1)^{r-1}\int \left[f(\tau_0(\mathbf{u}) - f(\tau_r(\mathbf{u}) \right] d\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{١٠٢}$$

من جهة أخرى،

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_r f)(\mathbf{x})dx_r \wedge dx_1 \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{r-1}(D_r f)(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \end{aligned}$$

لذلك فإن

$$\int_\sigma d\lambda = (-1)^{r-1}\int_{Q^k} (D_r f)(\mathbf{x})d\,\mathbf{x} \quad . \tag{١٠٣}$$

إننا نقيم (١٠٣) بالتكامل بالإسناد إلى x_r أولاً، عبر الفترة

$$\left[0,1-(x_1+\cdots+x_{r-1}+x_{r+1}+\cdots+x_k)\right],$$

ضع $(x_1,\ldots,x_{r-1},x_{r+1},\ldots,x_k)=(u_1,\ldots,u_{k-1})$، ولاحظ، بمساعدة (٩٨) بأن المتكامل فوق Q^k في (١٠٣) يكون مساوياً للمتكامل فوق Q^{k-1} في (١٠٢). لذلك فإن (٩٤) تتحقق، ويكون البرهان قد أكتمل.

الصيغ المغلقة والصيغة الدقيقة

Closed Forms And Exact Forms

١٠، ٣٤ تعريف: لتكن ω صيغة k- في المجموعة المفتوحة $E \subset R^n$. إذا كان يوجد هنالك صيغة $(k-1)$ - في E بحيث أن $\omega = d\lambda$، فيقال على ω بأنها ***دقيقة*** (*مضبوطة*) ***exact*** في ***E***.

إذا كانت ω من الصنف C' و $d\omega = 0$، فيقال على ω بأنها ***مغلقة*** ***closed***.

تبين المبرهنة ١٠، ٢٠ (ب) بأن كل صيغة دقيقة من الصنف C' تكون مغلقة.

في بعض المجاميع E، على سبيل المثال المجاميع المحدبة، يصح العكس ؛ وهذا هو محتوى المبرهنة ١٠، ٣٩ التي غالباً ما تعرف بـــ (*المبرهنة التمهيدية* لـــ *بونيكي* ***Poincae's lemma***) والمبرهنة ١٠، ٤٠. تبين الأمثلة، ١٠، ٣٦ و ١٠، ٣٧ الصيغ المغلقة التي ليست دقيقة.

١٠، ٣٥ ملاحظات:

(أ) بالإمكان إثبات فيما إذا كانت صيغة k- معطاة فإن ω تكون مغلقة أم لا بمجرد مفاضلة البسيطة للمعاملات التمثيل القياسي لـــ ω. على سبيل المثال، الصيغة - 1

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})dx_i, \qquad (١٠٤)$$

بـــ $f_i \in C'(E)$ بالنسبة إلى بعض المجموعات المفتوحة $E \subset R^n$، تكون مغلقة إذا وإذا فقط كانت المعادلات

$$\left(D_j f_i\right)(\mathbf{x})=\left(D_i f_j\right)(\mathbf{x}) \qquad (١٠٥)$$

تتحقق بالنسبة إلى جميع i, j في $\{1,\ldots,n\}$ وبالنسبة لجميع $\mathbf{x}\in E$.

لاحظ بأن (١٠٥) "شرطاً نقطياً" "pointwise" ؛ إنها لا تتضمن أية خواص شاملة تعتمد على شكل ***E***.

من جهة أخرى، لبرهنة ω دقيقة في E، فإن ذلك يستوجب برهنة وجود الصيغة λ، المعرفة في E بحيث أن $d\lambda = \omega$. يتوجب ذلك حل منظومة معادلات التفاضلية الجزئية، ليس محلياً فقط، وإنما في جميع E. على سبيل المثال، لبيان أن (١٠٤) دقيقة في المجموعة E، فإن ذلك يستوجب إيجاد الدالة (أو الصيغة -0) $g \in \mathcal{C}'(E)$ بحيث أن

$$(D_i g)(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E, \ \ 1 \le i \le n). \tag{١٠٦}$$

بالطبع، فإن (١٠٥) هي شرط أساسي لقابلية (١٠٦) على الحل.

(ب) لتكن ω صيغة - k دقيقة في E. عندها يوجد هنالك صيغة - $(k\ \text{-}1)$ λ في E بـــ $d\lambda = \omega$، وتؤكد مبرهنة ستوك بأن

$$\int_{\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\lambda = \int_{\partial\Psi} \lambda \tag{١٠٧}$$

لكل سلسلة -k Ψ من الصنف $\mathcal{C}''$ في E.

إذا كانت Ψ_1 و Ψ_2 تمثل سلسلتين، وإذا كانت لهما نفس القيود، ينتج من ذلك

$$\int_{\Psi_1} \omega = \int_{\Psi_2} \omega .$$

على وجه الخصوص، *فإن المتكامل لصيغة -k دقيقة في E هو 0 فوق كل سلسلة -k في E التي قيدها 0.*

كحالة خاصة مهمة لذلك، لاحظ بأن متكاملات الصيغ -1 الدقيقة في E هي 0 فوق المنحنيات المغلقة (القابلة للتفاضل) في E.

(ج) لتكن ω صيغة -k مغلقة في E. عندها فإن $d\omega = 0$، وتؤكد مبرهنة ستوك بأن

$$\int_{\partial\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\omega = 0 \tag{١٠٨}$$

لكل سلسلة -$(k+1)$ Ψ من الصنف $\mathcal{C}''$ في E.

بكلمة أخرى، *تكون متكاملات الصيغ - k المغلقة في E، 0 فوق السلاسل - k التي هي قيود لسلاسل - $(k+1)$ في E.*

(د) لتكن Ψ سلسلة -$(k+1)$ في E ولتكن λ صيغة -$(k\ \text{-}1)$ في E، كل منهما من الصنف $\mathcal{C}''$. بما أن $d^2\lambda = 0$، فإن تطبيقين لمبرهنة ستوك تبين أن

$$\int_{\partial\partial\Psi} \lambda = \int_{\partial\Psi} d\lambda = \int_{\Psi} d^2\lambda = 0. \tag{١٠٩}$$

نستنتج بأن $\partial^2\Psi = 0$. بكلمة أخرى، ***فإن قيد القيد يكون 0***.

راجع التمرين ١٦ الذي يبين برهاناً أكثر مباشرة لذلك.

١٠، ٣٦ مثال: لتكن $E = \mathbf{R}^2 - \{0\}$، المستوي الذي رفعت منه نقطة الأصل. الصيغة -1

$$\eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{١١٠}$$

مغلقة closed في $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. بالإمكان إثبات بسهولة بإجراء عملية التفاضل. ثبت $r > 0$ وعرف

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad (0 \le t \le 2\pi). \tag{١١١}$$

عندها فإن γ تكون منحنياً (منفرد -1 متوجيهه **an oriented 1- simple**) في $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. بما أن $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$، فإن لدينا

$$\partial\gamma = 0. \tag{١١٢}$$

يبين الاحتساب المباشر بأن

$$\int_\gamma \eta = 2\pi \ne 0. \tag{١١٣}$$

إن النقاش في الملاحظتين ١٠، ٣٥ (ب) و (ج) يفيد بأننا نستطيع القيام باستنتاجين من (١١٣):

أولا، إن η ***ليست دقيقه not exact*** في $\mathbf{R}^2 - \{0\}$، وذلك لأنه خلاف ذلك سيغير المتكامل (١١٣) ليكون 0.

ثانيا، γ ***ليست الحد لـِ أي سلسلة -2*** في ($\mathbf{R}^2 - \{0\}$ ***من الصف*** "C") ***not the boundary of any 2 – chain in*** $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. وذلك لأنه خلاف ذلك، ولكون η مغلقة فأن سيغير (١١٣) ليكون 0.

١٠، ٣٧ مثال: لتكن $E = \mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$، فضاءاً -3 مرفوع أساسها. عرف

$$\zeta = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{١١٤}$$

حيث أننا كتبنا (x, y, z) بدلاً من (x_1, x_2, x_3). يبين التفاضل بأن $d\zeta = 0$، لذلك فإن ζ تكون صيغة -٢ مغلقة في $\mathbf{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$.

لتكن $\sum$ السلسلة -2 في $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ التي شكلت في المثال ١٠، ٣٢ ؛ أستذكر بأن $\sum$ هي الوساطة لكرة الوحدة في $\mathbb{R}^3$. باستخدام المثلث D في المثال ١٠، ٣٢ كمنطلق وسيط، من السهولة احتساب أن

$$\int_{\sum} \zeta = \int_{\Delta} \sin u du dv = 4\pi \neq 0 \qquad (١١٥)$$

كما في المثال السابق، نستطيع الآن الاستنتاج بأن ζ *ليست دقيقة في* $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ (نظراً لأن $\partial\sum = 0$، كما مبين في المثال ١٠، ٣٢) وإن الكرة $\sum$ ليست القيد لأي سلسلة -3 في $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ (من الصنف $\mathcal{C}''$)، على الرغم من إن $\partial\sum = 0$. ستستخدم النتيجة الآتية في برهان المبرهنة ١٠، ٣٩.

١٠، ٣٨ مبرهنة: *لنفترض إن* E *مجموعة مفتوحة محدبة في* $\mathbb{R}^n$، $f \in \mathcal{C}'(E)$، p *عدداً صحيحاً،* $1 \leq p \leq n$، و

$$(D_j f)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (p < j \leq n, \mathbf{x} \in E) . \qquad (١١٦)$$

عندها يوجد هنالك $F \in \mathcal{C}'(E)$ *بحيث أن*

$$(D_p F)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad (D_j F(\mathbf{x}) = 0 \qquad (p < j \leq n, \mathbf{x} \in E) \qquad (١١٧)$$

البرهان: أكتب $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_p, \mathbf{x}'')$، حيث

$$\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{p-1}), \quad \mathbf{x}'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n).$$

(عندما $p = 1$، تغيب $\mathbf{x}'$ ؛ عندما $p = n$، تغيب $\mathbf{x}''$.) لتكن V مجموعة جميع $(\mathbf{x}', x_p) \in \mathbb{R}^p$ بحيث أن $(\mathbf{x}', x_p, \mathbf{x}'') \in E$ بالنسبة لبعض $\mathbf{x}''$. نظراً لكونها مسقط لـ E، فإن V مجموعة مفتوحة محدبة في $\mathbb{R}^p$. بما أن E محدبة و (١١٦) تتحقق، فإن $f(\mathbf{x})$ لا تعتمد على $\mathbf{x}''$. إذن يوجد هنالك دالة φ بمنطلق V بحيث أن

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}', x_p)$$

بالنسبة لجميع $\mathbf{x} \in E$.

إذا كانت $p = 1$، فإن V هي قطعة في $\mathbb{R}^1$ (احتمال تكون غير مقيدة). أختار $c \in V$ وعرف

$$F(\mathbf{x}) = \int_c^{x_1} \varphi(t) dt \qquad (\mathbf{x} \in E) .$$

إذا كانت $p > 1$، لتكن U مجموعة جميع $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{p-1}$ بحيث أن $(\mathbf{x}', x_p) \in V$ بالنسبة

لبعض x_p. عندها فإن U مجموعة محدبة في $\mathbf{R}^{p-1}$، ويوجد هنالك دالة $\alpha \in \mathcal{C}(U)$ بحيث أن $(\mathbf{x}',\alpha(\mathbf{x}')) \in V$ لكل $\mathbf{x}' \in U$ ؛ بكلمة أخرى، الرسم البياني لـ α يقع في V (التمرين ٢٩). عرف

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{x_p} \varphi(\mathbf{x}',t)dt \qquad (\mathbf{x} \in E) .$$

في كلتا الحالتين، فإن F تحقق (١١٧).

(ملاحظة: استذكر الاصطلاح المألوف الذي يفيد بأن $\int_a^b$ يعني $-\int_b^a$ إذا كانت $b < a$).

١٠، ٣٩ مبرهنة: *إذا كانت $E \subset \mathbf{R}^n$ محدبة مفتوحة، إذا كانت $k \geq 1$، إذا كانت ω صيغة -k من الصنف $\mathcal{C}'$ في E، وإذا كانت $d\omega = 0$، عندها يوجد هنالك صيغة -$(k-1)$ في E بحيث أن $\omega = d\lambda$.*

بشكل مختصر، تكون الصيغ المغلقة دقيقة في المجموعات المحدبة.

البرهان: بالنسبة إلى $p = 1,\dots,n$، لتكن Y_p ترمز إلى مجموعة جميع الصيغ -k ω، من الصنف $\mathcal{C}'$ في E، التي تمثيلها القياسي هو

$$\omega = \sum_I f_I(\mathbf{x})dx_I \tag{١١٨}$$

لا يشتمل على $dx_{p+1},\dots,dx_n$. بكلمة أخرى، إذا كان $f_I(\mathbf{x}) \neq 0$ بالنسبة لبعض $\mathbf{x} \in E$.

سوف نواصل البرهان بالاستقراء على p.

نفترض أولاً أن $\omega \in Y_1$. عندها فإن $\omega = f(\mathbf{x})dx_1$. بما أن $d\omega = 0$، $(D_j f)(\mathbf{x}) = 0$ بالنسبة إلى $1 < j \leq n$, $\mathbf{x} \in E$. استناداً إلى ١٠، ٣٨ يوجد هنالك $F \in \mathcal{C}'(E)$ بحيث أن $D_1 F = f$ و $D_j F = 0$ بالنسبة إلى $1 < j \leq n$. لذلك فإن

$$dF = (D_1 F)(\mathbf{x})dx_1 = f(\mathbf{x})dx_1 = \omega .$$

الآن نأخذ $p > 1$ ونضع الفرضية الاستقرائية الآتية: *تكون كل صيغة -k مغلقة تنتمي إلى Y_{p-1} دقيقة في E.*

نختار $\omega \in Y_p$ بحيث أن $d\omega = 0$. استناداً إلى (١١٨)،

$$\sum_I \sum_{j=1}^{n} (D_j f_I)(\mathbf{x})dx_j \wedge dx_I = d\omega = 0. \tag{١١٩}$$

لاحظ من الثابت j، بـــ $p < j \le n$. يقع كل I يحدث في (١١٨) في $\{1,\ldots,p\}$. إذا كان I_2 , I_1 اثنان من هذه الأدلة k-، وإذا كان $I_1 \ne I_2$، فإن الدليلين - (k+1) $(I_2, j),(I_1, j)$ يكونان منفصلين. لذلك لا توجد هنالك أي حذف، ونستنتج من (١١٩) أن كل معامل في (١١٨) يحقق

$$(D_j f_I)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (\mathbf{x} \in E, p < j \le n). \tag{١٢٠}$$

نقوم الآن بتجميع تلك الحدود في (١١٨) التي تحتوي على dx_p ونعيد كتابة ω بالشكل الآتي

$$\omega = \alpha + \sum_{I_0} f_I(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_p, \tag{١٢١}$$

حيث أن $\alpha \in Y_{p-1}$، كل I_0 دليل- (k-1) متزايد في $\{1,\ldots,p-1\}$، و $I = (I_0, p)$.

استناداً إلى (١٢٠)، فإن المبرهنة ١٠، ٣٨ تقدم الدوال $F_I \in C'(E)$ بحيث أن

$$D_p F_I = f_I\,, \quad D_j F_I = 0 \qquad (p < j \le n). \tag{١٢٢}$$

ضع

$$\beta = \sum_{I_0} F_I(\mathbf{x}) dx_{I_0} \tag{١٢٣}$$

وعرف $\gamma = \omega - (-1)^{k-1} d\beta$. بما أن β هي صيغة - (k-1)، فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p} (D_j F_I)(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_j \\ &= \alpha - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p-1} (D_j F_I)(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_j, \end{aligned}$$

والتي من الواضح أنها تقع في Y_{p-1}. بما أن $d\omega = 0$ و $d^2\beta = 0$، فإن لدينا $d\gamma = 0$. لذلك تبين فرضيتنا الاستقرائية بأن $\gamma = d\mu$ بالنسبة لبعض الصيغ - μ في E. إذا كانت $\lambda = \mu + (-1)^{k-1}\beta$، فإننا نستنتج بأن $\omega = d\lambda$.

استناداً إلى الاستقراء، فإن هذا ينهي البرهان.

١٠، ٤٠ مبرهنة: *ثبت k، $1 \le k \le n$. لتكن $E \subset \mathbf{R}^n$ المجموعة المفتوحة التي تكون فيها كل صيغة -k مغلقة دقيقة. لتكن T تطبيقاً C'' 1-1 لـــ E في المجموعة المفتوحة $U \subset \mathbf{R}^n$ التي معكوسها S من الصنف- C'' أيضاً.*

عندها فإن كل صيغة – k مغلقة في U تكون دقيقة في U.

لاحظ بأن كل مجموعة مفتوحة محدبة E تحقق الفرضيات الحالية، استناداً إلى المبرهنة ١٠، ٣٩. بالإمكان التعبير عن العلاقة بين E و U بالقول إنها متكافئتين – C'' .

لذلك فإن كل صيغة مغلقة تكون دقيقة في إي مجموعة متكافئة – C'' لمجموعة مفتوحة محدبة.

البرهان: لتكن ω صيغة –k في U، بـــ $d\omega = 0$. استناداً إلى المبرهنة ١٠، ٢٢ (ج)، ω_T تكون الصيغة – k في E التي تكون فيها $d(\omega_T) = 0$. إذن $\omega_T = d\lambda$ لبعض (k-1) λ في E. استناداً إلى المبرهنة ١٠، ٢٣، والتطبيق الإضافي للمبرهنة ١٠، ٢٢ (ج) فإن

$$\omega = (\omega_T)_S = (d\lambda)_S = d(\lambda_S) .$$

بما أن λ_S صيغة – (k-1) في U، فإن ω دقيقة في U.

١٠، ٤١ ملاحظة: غالباً ما، تكون الخلايا (راجع التعريف ٢، ١٧) منطلقات وسطية أكثر ملائمة من المفردات في التطبيقات. إذا الاحتسابات المذكورة في برهان مبرهنة ستوك ستكون أبسط بكثير فيما إذا كانت مبنية على الخلايا بدلاً من المفردات (الطريقة المتبعة في كتاب سبيفاك). إن سبب تفضيلنا للمفردات هو أن تعريف القيد للمفردة المتوجيهة يبدو أكثر سهولة وطبيعية مقارنة بحالة الخلايا. (راجع التمرين ١٩). كذلك فإن تقسيم المجموعات إلى مفردات (يسمى "التثليث" triangulation) يلعب دوراً مهماً في الطبولوجيا، وإن هنالك ترابط وثيق بين بعض نواحي الطبولوجيا، من جهة، والصيغ القابلة للتفاضل من جهة أخرى. تم التلميح إلى ذلك من الجزء ١٠، ٣٥. يحتوي كتاب سنكلر وثورب singer and thorpe على مقدمة جيدة لهذا الموضوع.

بما أنه يمكن تثليث إي خلية، فإننا قد نعتبرها كخلية. بالنسبة إلى الأبعاد –2، فإن هذا قد يتم في المثال ١٠، ٣٢ ؛ بالنسبة إلى الأبعاد –3، راجع التمرين ١٨.

بالإمكان برهنة نتيجة بونيكير ponicare's lemma (المبرهنة ١٠،٣٩) بعدة طرق. راجع على سبيل المثال، الصفحة ٩٤ من كتاب سبيفاك، أو صفحة ٢٨٠ في كتاب فليمنك Fleming's. تم ذكر برهانين بسيطين لبعض الحالات الخاصة في التمرينين ٢٤ و٢٧.

تحليل المتجه Vector Analysis

نختتم هذا الفصل بذكر بعض التطبيقات للمواد التي تناولناها للنظريات التي تخص تحليل المتجه في $\mathbf{R}^3$. إن هذه التطبيقات هي حالات خاصة لمبرهنات الصيغ القابلة للتفاضل، ولكن غالباً ما يتم ذكرها باصطلاحات مختلفة. لذلك فإننا هنا بمثابة من يجابه عملية الترجمة من لغة أخرى.

١٠، ٢ ٤ الحقول المتجهة Vector Fields

لتكن $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$ تطبيقاً مستمراً للمجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^3$ في $\mathbf{R}^3$. بما أن $\mathbf{F}$ تعين متجهاً لكل نقطة من نقاط E، ففي بعض الأحيان يطلق على $\mathbf{F}$ الحقل المتجة، وبشكل خاص في الفيزياء. توجد هنالك مع كل مثل هذه الـ $\mathbf{F}$ صيغة -1

$$\lambda_{\mathbf{F}} = F_1dx + F_2dy + F_3dz \qquad (١٢٤)$$

و صيغة -2

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1dy \wedge dz + F_2dz \wedge dx + F_3dx \wedge dy \ . \qquad (١٢٥)$$

سنستخدم هنا، وفيما تبقى من هذا الفصل، الرمز المألوف (x, y, z) بدلاً من (x_1, x_2, x_3).

بشكل معاكس، من الواضح أن كل صيغة λ - 1 في E تكون $\lambda_{\mathbf{F}}$ بالنسبة لبعض الحقول المتجه $\mathbf{F}$ في E، وإن كل صيغة -2 ω تكون $\omega_{\mathbf{F}}$ بالنسبة لبعض $\mathbf{F}$. لذلك فإن دراسة الصيغ -1 والصيغ -2 في $\mathbf{R}^3$، مطابقة لدراسة الحقول المتجه.

إذا كانت $u \in \mathscr{C}'(E)$ دالة حقيقية، فإن ميلها ***its gradient***

$$\nabla u = (D_1u)\mathbf{e}_1 + (D_2u)\mathbf{e}_2 + (D_3u)\mathbf{e}_3$$

يعتبر مثالاً كحقل متجه في E.

افترض الآن أن $\mathbf{F}$ حقلاً متجه في E، من الصنف $\mathscr{C}'$. *لفتها* ***curl*** $\nabla \times \mathbf{F}$ هو الحقل المتجه المعرف في E بـــ

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_2F_3 - D_3F_2)\mathbf{e}_1 + (D_3F_1 - D_1F_3)\mathbf{e}_2 + (D_1F_2 - D_2F_1)\mathbf{e}_3$$

وتباعدها ***divergence*** هو الدالة الحقيقية $\nabla \cdot \mathbf{F}$ المعرفة في E بـــ

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3 \ .$$

تمتلك هذه الكميات تعبيرات فيزياوية مختلفة. لزيادة المعلومات، نشير هنا إلى كتاب أو. دي كليوك *O. D. kellogg*.

نقدم أدناه بعض العلاقات بين *ميل المتجهات* **its gradient**، *اللفات* **curls** *والمتباعدات* **divergence**.

١٠، ٤٣ مبرهنة: *لنفترض أن* E *مجموعة مفتوحة في* $\mathbf{R}^3$، $u \in \mathcal{C}''(E)$ *و* $\mathbf{G}$ *هو حقل المتجه في* E، *من الصنف* $\mathcal{C}''$.

(أ) *إذا كانت* $\mathbf{F} = \nabla u$، *فإن* $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

(ب) *إذا كانت* $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$، *فإن* $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

إضافة إلى ذلك، إذا كانت E *مكافئاً ـ* $\mathcal{C}''$ *لمجموعة محدبة، فإن (أ) و (ب) تمتلكان مقلوبين، اللذين نفترض فيهما أن* $\mathbf{F}$ *حقلاً متجهاً في* E، *من الصنف* $\mathcal{C}'$:

(أ") *إذا كانت* $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$، *فإن* $\mathbf{F} = \nabla u$ *لبعض* $u \in \mathcal{C}''(E)$.

(ب") *إذا كانت* $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$، *فإن* $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ *لبعض الحقول المتجهة في* E، *من الصنف* $\mathcal{C}''$.

البرهان: إذا قارنا تعاريف ∇u , $\nabla \times \mathbf{F}$ و $\nabla \cdot \mathbf{F}$ مع الصيغ القابلة للتفاضل $\lambda_{\mathbf{F}}$ و $\omega_{\mathbf{F}}$ المقدمة في (١٢٤) و (١٢٥)، فإننا نحصل على النصوص الأربعة الآتية:

$$\mathbf{F} = \nabla u \quad \text{إذا وإذا فقط كانت} \quad \lambda_{\mathbf{F}} = du$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \text{إذا وإذا فقط كانت} \quad d\lambda_{\mathbf{F}} = 0$$

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} \quad \text{إذا وإذا فقط كانت} \quad \omega_{\mathbf{F}} = d\lambda_{\mathbf{G}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{إذا وإذا فقط كانت} \quad d\omega_{\mathbf{F}} = 0$$

الآن إذا كانت $\mathbf{F} = \nabla u$، فإن $\lambda_{\mathbf{F}} = du$، إذن $d\lambda_{\mathbf{F}} = d^2u = 0$ (المبرهنة ١٠، ٢٠)، والتي تعني أن $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. وبذلك نكون قد برهنا (أ).

أما بخصوص (أ") فإن الافتراضية تتلخص لقول أن $d\lambda_{\mathbf{F}} = 0$ في E. استناداً إلى المبرهنة ١٠، ٤٠ ، فإن $\lambda_{\mathbf{F}} = du$ لبعض الصيغ $0 - u$. إذن $\mathbf{F} = \nabla u$.

لتم برهنة (ب) و (ب") بنفس الطريقة بالضبط.

١٠، ٤٤ عناصر الحجم Volume elements: تسمى الصيغة ـ k

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

عنصر الحجم في $\mathbf{R}^k$. غالباً ما يرمز إليه بالرمز dV (أو بالرمز dV_k إذا أريد تحديد البعد بشكل ظاهر)، ويستخدم الرمز

$$\int_{\Phi} f(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{\Phi} f dV \qquad (١٢٦)$$

عندما تكون Φ سطحاً k - متوجهه إيجابيا في $\mathbf{R}^k$ و f دالة مستمرة في مدى Φ. إن سبب استخدام هذا المصطلح بسيط جداً : إذا كانت D منطلقاً وسيطاً في $\mathbf{R}^k$ وإذا كانت Φ تطبيقاً $\mathscr{C}'$ - 1 - 1 لــ D في $\mathbf{R}^k$، بجاكوبي موجب J_Φ، فإن الجانب الأيسر من (١٢٦) هو

$$\int_D f(\Phi(\mathbf{u}))J_\Phi(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

استناداً إلى (٣٥) والمبرهنة ١٠، ٩.

على وجه الخصوص، عندما تكون $f = 1$ ، فإن (١٢٦) تُعرف حجم Φ *volume*. وقد لاحظنا سابقاً حالة خاصة لهذا في (٣٦).

إن الترميز المألوف لــ dV_2 هو dA.

١٠، ٤٥ مبرهنة: كرين Green's theorem *لنفترض أن E مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^2$، $\alpha \in \mathscr{C}'(E)$, $\beta \in \mathscr{C}'(E)$، و Ω مجموعة جزئية مغلقة لــ E، بقيد متوجهه إيجابياً $\partial\Omega$، كما مذكور في البند ١٠، ٣١. عندها فإن*

$$\int_{\partial\Omega} (\alpha\, dx + \beta\, dy) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right) dA. \qquad (١٢٧)$$

البرهان: ضع $\lambda = \alpha\, dx + \beta\, dy$. عندها فإن

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_2\alpha)dy \wedge dx + (D_1\beta)dx \wedge dy \\ &= (D_1\beta - D_2\alpha)dA, \end{aligned}$$

و (١٢٧) هي نفس

$$\int_{\partial\Omega} \lambda = \int_{\Omega} d\lambda ,$$

والتي هي صحيحة استناداً إلى المبرهنة ١٠، ٣٣.

بوضع $\alpha(x,y) = -y$ و $\beta(x,y) = x$، فإن (١٢٧) تصبح

$$\tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x dy - y dx) = A(\Omega), \qquad (١٢٨)$$

مساحة Ω.

بوضع $\alpha = 0$, $\beta = x$، فإننا لحصل على صيغة مشابهة. يحتوي المثال ١٠، ١٢ (ب) على حالة خاصة لذلك.

١٠، ٤٦ عناصر المساحة في Area elements in $\mathbf{R}^3$: لتكن Φ سطحاً -2 في $\mathbf{R}^3$، من الصنف $\mathcal{C}'$ ، بمنطلق وسيط $D \subset \mathbf{R}^2$.. عين لكل نقطة $(u,v) \in D$ المتجه

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_3 . \tag{١٢٩}$$

إن الجاكوبينات في (١٢٩) تقابل المعادلة

$$(x,y,z) = \Phi(u,v) \ . \tag{١٣٠}$$

إذا كانت f دالة مستمرة في $\Phi(D)$، فإن *متكامل المساحة* لـ ***area integral of f*** فوق Φ يعرف بأنه

$$\int_\Phi f dA = \int_D f(\Phi(u,v)|\mathbf{N}(u,v)|dudv \ . \tag{١٣١}$$

على وجه الخصوص، عندما تكون $f = 1$ فإننا نحصل على مساحة Φ، وعلى وجه الخصوص

$$A(\Phi) = \int_D |\mathbf{N}(u,v)|dudv \ . \tag{١٣٢}$$

ستبين النقاشات القادمة إن (١٣١) وحالتها الخاصة (١٣٢) هما تعريفين معقولين. وسنقدم أيضاً الخصائص الهندسية للمتجه $\mathbf{N}$.

اكتب $\Phi = \varphi_1\mathbf{e}_1 + \varphi_2\mathbf{e}_2 + \varphi_3\mathbf{e}_3$، ثبت النقطة $\mathbf{p}_0 = (u_0,v_0) \in D$، ضع $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{p}_0)$، ضع

$$\alpha_i = (D_1\varphi_i)(\mathbf{p}_0), \beta_i = (D_2\varphi_i)(\mathbf{p}_0) \qquad (i = 1,2,3) \tag{١٣٣}$$

ولتكن $T \in L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ التحويل الخطي المقدم بـــ

$$T(u,v) = \sum (\alpha_i u + \beta_i v)\mathbf{e}_i \ . \tag{١٣٤}$$

لاحظ بأن $T = \Phi'(\mathbf{p}_0)$، وفقاً ٩، ١١.

لنفترض الآن إن رتبة T هي 2. (إذا كانت 1 أو 0، فإن $\mathbf{N} = 0$، و المستوي المماس المذكور أدناه يتضاءل إلى الخط أو نقطة). لذلك فإن مدى التطبيق المتآلف

$$(u,v) \to \Phi(\mathbf{p}_0) + T(u,v)$$

هو المستوي Π، الذي يسمى *المستوي المماس* ***tangent plane*** لـ Φ في $\mathbf{p}_0$. [قد يفضل البعض تسمية Π المستوي المماس في $\Phi(\mathbf{p}_0)$ بدلاً من $\mathbf{p}_0$ ؛ إذا لم تكن Φ واحد-لـ - واحد، فإن ذلك يؤدي إلى بعض المتاعب].

إذا استخدمنا (١٣٣) في (١٢٩)، فإننا نحصل على

$$\mathbf{N} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3, \quad (١٣٥)$$

وتبين (١٣٤) إن

$$Te_1 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i \mathbf{e}_i, \qquad Te_2 = \sum_{i=1}^{3}\beta_i \mathbf{e}_i . \quad (١٣٦)$$

باحتساب مباشر الآن نتوصل إلى إن

$$\mathbf{N}\cdot(T\mathbf{e}_1) = 0 = \mathbf{N}\cdot(T\mathbf{e}_2) \quad . \quad (١٣٧)$$

إذن $\mathbf{N}$ عمودية على Π. ولذلك فإنها تسمى عمودية لـ Φ في $\mathbf{p}_0$.

تستنتج الخاصية الثانية لـ $\mathbf{N}$ أيضاً عن طريق الاحتساب المباشر في (١٣٥) و (١٣٦)، وهي إن محددة التحويل الخطي لـ $\mathbf{R}^3$ التي تأخذ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ إلى $\{T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}\}$ هي $|\mathbf{N}|^2 > 0$ (التمرين ٣٠). لذلك فإن المفردة 3-

$$[0, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}] \quad (١٣٨)$$

متوجيهه إيجابيا. positively oriented .

إن الخاصية الثالثة لـ $\mathbf{N}$ التي سنستخدمها هي نتيجة للخاصيتين الأولى: إن المحددة المذكورة أعلاه، التي قيمتها هي $|\mathbf{N}|^2$، هي حجم متوازي السطوح الذي رؤوسه $[0, T\mathbf{e}_1], [0, T\mathbf{e}_2], [0, \mathbf{N}]$. استناداً إلى (١٣٧)، فإن $[0, \mathbf{N}]$ متعامدة مع الرأسين الآخرين. لذلك فإن *مساحة متوازي الأضلاع* الذي رؤوسه هي

$$0, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \quad (١٣٩)$$

هو $|\mathbf{N}|$.

إن متوازي الأضلاع هذا هو الصورة image تحت T لمربع الوحدة في $\mathbf{R}^2$. إذا كانت E أي مثلث في $\mathbf{R}^2$، فإن ذلك يؤدي (استناداً إلى خطية T) إلى مساحة متوازي الأضلاع $T(E)$ هي

$$A(T(E)) = |\mathbf{N}|A(E) = \int_E |\mathbf{N}(u_0, v_0)|\,du\,dv. \quad (١٤٠)$$

نستنتج أن (١٣٢) تصح عندما تكون Φ متآلفة. لإثبات التعريف (١٣٢) في الحالة العامة، قسم D إلى مثلثات صغيرة، اختار نقطة (u_0, v_0) في كل منهما، واستبدل Φ في كل مثلث بالمستوي المماس المقابل. لذلك فإن مجموع مساحات متوازي الأضلاع الناتجة عن ذلك،

التي حصلنا عليها عبر (١٤٠)، هي تقريب **approximation** $A(\Phi)$. أخيراً، يستطيع المرء إثبات (١٣١) من (١٣٢) بواسطة تقريب f بواسطة الدوال السلمية.

١٠، ٤٧ مثال: لتكن $0 < a < b$ ثابتة. لتكن K الخلية – 3 المحددة بـ

$$0 \le t \le a\,,\quad 0 \le u \le 2\pi\,,\quad 0 \le v \le 2\pi\ .$$

توصف المعادلات

$$\begin{aligned} x &= t\cos u \\ y &= (b + t\sin u)\cos v \\ z &= (b + t\sin u)\sin v \end{aligned} \qquad (١٤١)$$

تطبيقاً Ψ لـ R^3 في R^2 الذي هو 1-1 في المنطقة الداخلية لـ K، بحيث أن $\Psi(K)$ إطار صلب **torus solid**. الجاكوبي لها هو

$$J_\Psi = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,u,v)} = t(b + t\sin u)$$

الذي هو موجباً في K، ماعدا في الوجه $t = 0$. إذا كاملنا J_Ψ فوق K، فإننا نحصل على

$$\mathrm{vol}(\Psi(K)) = 2\pi^2 a^2 b$$

لحجم لإطارنا الصلبة.

الآن لاحظ السلسلة –2 $\Phi = \partial\Psi$. (راجع التمرين ١٩). تطبيقاً Ψ وَجْهَي K، $u = 0$ و $u = 2\pi$ بنفس المقطع الأسطواني، ولكن بتوجيه معاكس. تطبيق Ψ ألوجهين $v = 0$ و $v = 2\pi$ بنفس القرص الأسطواني، ولكن بتوجيه معاكس. تطبي Ψ الوجه $t = 0$ في الدائرة، التي نقدم 0 للسلسلة –2 $\partial\Psi$. (تكون الجاكوبيات ذات العلاقة 0). لذلك فإن Φ هي بباسطة السطح –2 الذي نحصل علية بوضع $t = a$ في (١٤١)، بمنطلق وسيط D المربع المعرف $0 \le v \le 2\pi, 0 \le u \le 2\pi$.

لذلك، واستناداً إلى (١٢٩) و (١٤١)، فإن العمود لـ Φ في $(u,v) \in D$ هو المتجه

$$\mathbf{N}(u,v) = a(b + a\sin u)\mathbf{n}(u,v)$$

حيث أن

$$\mathbf{n}(u,v) = (\cos u)\mathbf{e}_1 + (\sin u\cos v)\mathbf{e}_2 + (\sin u\sin v)\mathbf{e}_3\ .$$

بما أن $|\mathbf{n}(u,v)| = 1$، فإن لدينا $|\mathbf{N}(u,v)| = a(b + a\sin u)$، وإذا كاملنا هذا فوق D، فإن (١٣١) تعطي

$$A(\Phi) = 4\pi^2 ab$$

كمساحة سطحية لإطارنا.

إذا ما فكرنا بـ $\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{N}$ كقطعة خطية موجهة، يوجه من $\Phi(u,v)$ إلى $\Phi(u,v) + \mathbf{N}(u,v)$، ثم النقاط N *خارجياً outward*، أي بما معناه بعيداً عن $\Psi(K)$، إن هذا يرجع إلى أن $J_\Psi > 0$ عندما تكون $t = a$.

على سبيل المثال، لنأخذ $t = a, u = v = \pi/2$. إن هذا يعطي أكبر قيمة لـ z في $\Psi(K)$، و $\mathbf{N} = a(b+a)\mathbf{e}_3$، تؤشر "إلى الأعلى" "upward" بالنسبة لهذا الخيار لـ (u,v).

١٠، ٤٨ تكاملات الصيغ –1 في Integral of 1-forms in $\mathbf{R}^3$ لتكن γ منحنياً ـــ $\mathcal{C}'$ في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^3$، بفترة وسيطة $[0,1]$، لتكن $\mathbf{F}$ حقلاً متجهاً في E، كما في البند ١٠، ٤٢ ؛ وعرف $\lambda_{\mathbf{F}}$ بـ (١٢٤). يمكن إعادة كتابة متكامل $\lambda_{\mathbf{F}}$ فوق γ بطريقة معينة، والتي سنصفها الآن.

لأي $u \in [0,1]$،

$$\gamma'(u) = \gamma_1'(u)\mathbf{e}_1 + \gamma_2'(u)\mathbf{e}_2 + \gamma_3'(u)\mathbf{e}_3$$

يسمى *المماس المتجه لـ* γ *في u vector tangent*. نعرف $\mathbf{t} = \mathbf{t}(u)$ لتكون متجه الوحدة vector unit باتجاه $\gamma'(u)$. لذلك فإن

$$\gamma'(u) = |\gamma'(u)|\mathbf{t}(u).$$

[إذا كانت $\gamma'(u) = 0$ بالنسبة لبعض u، ضع $\mathbf{t}(u) = \mathbf{e}_1$ ؛ أي اختيار آخر سيؤدي إلى نفس النتيجة]. استناداً إلى (٣٥)،

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda_{\mathbf{F}} &= \sum_{i=1}^{3}\int_0^1 F_i(\gamma(u))\gamma_i'(u)du \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)du \qquad (١٤٢) \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u))\cdot\mathbf{t}(u)|\gamma'(u)|du.\end{aligned}$$

تمكننا المبرهنة ٦، ٢٧ من أن نسمي $|\gamma'(u)|du$ *عنصر طول القوس عبر* γ **du the element of are length along** γ. والرمز المألوف له هو ds ،-ويعاد كتابة (١٤٢) بالصيغة

$$\int_{\gamma} \lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\gamma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds. \qquad (١٤٣)$$

بما أن $\mathbf{t}$ هي متجه وحدة المماس لـ γ **to tangent unit**، فإن $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ تسمى المركب المماس ***component tangential*** لـ $\mathbf{F}$ عبر γ.

يجب إن يعتبر الجانب الأيمن من (١٤٣) مجرد مختصر للتكامل الأخير في (١٤٢). إن المسألة هي أن $\mathbf{F}$ معرفة في مدى γ، بينما $\mathbf{t}$ معرفة في $[0,1]$؛ لذلك فإن $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ يجب أن تفسر بصورة صحيحة. وبالطبع، عندما تكون γ واحد- لـ واحد، يمكن استبدال $\mathbf{t}(u)$ بـ $\mathbf{t}(\gamma(u))$، وبذلك تختفي هذه المشكلة.

١٠، ٤٩ متكاملات الصيغ -2 في R^3 Integrals of 2- forms in R^3

لتكن Φ سطحاً -2 في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^3$، من الصنف C'، بمنطلق وسيط $D \subset \mathbf{R}^2$. لتكن $\mathbf{F}$ حقلاً متجهاً في E، وعرف $\omega_{\mathbf{F}}$ بـ(١٢٥). كما في القسم السابق، سوف نحصل على تمثيل مختلف لمتكامل $\omega_{\mathbf{F}}$ فوق Φ.

استناداً إلى (٣٥) و (١٢٩)،

$$\begin{aligned}\int_{\Phi} \omega_{\mathbf{F}} &= \int_{\Phi} (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) \\ &= \int_{D} \left\{ (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (F_2 \circ \Phi) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (F_3 \circ \Phi) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du dv \\ &= \int_{D} \mathbf{F}(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}(u,v) du dv.\end{aligned}$$

الآن لتكن $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u,v)$ متجه الوحدة باتجاه $\mathbf{N}(u,v)$. [إذا كانت $\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{0}$ بالنسبة لبعض $(u,v) \in D$، نأخذ $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{e}_1$]. عندها فإن $\mathbf{N} = |\mathbf{N}|\mathbf{n}$، ولذلك فإن المتكامل الأخير سيصبح

$$\int_{D} \mathbf{F}(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) |\mathbf{N}(u,v)| du dv \ .$$

استناداً إلى (١٣١)، فإننا نستطيع أن نكتب ذلك بالصيغة

$$\int_{\Phi} \omega_{\mathbf{F}} = \int_{\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dA \ . \qquad (١٤٤)$$

أما بخصوص معنى $\mathbf{F}.\mathbf{n}$، فإن الملاحظة المذكورة في نهاية ١٠، ٤٨ تنطبق هنا أيضاً.

نستطيع الآن ذكر الصيغة الأصلية لمبرهنة ستوك.

١٠، ٥٠ صيغة ستوك Stokes' Formula

إذا كانت $\mathbf{F}$ حقلاً متجهاً من الصنف C' في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^3$، وإذا كانت Φ سطحاً -2 من الصنف C'' في E، فإن

$$\int_{\Phi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds \ . \tag{١٤٥}$$

البرهان: ضع $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{F}$. عندها، وكما في برهان المبرهنة ١٠، ٤٣ فإن لدينا

$$\omega_{\mathbf{H}} = d\lambda_{\mathbf{F}} \ . \tag{١٤٦}$$

إذن

$$\int_{\Phi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\Phi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_{\Phi} \omega_{\mathbf{H}}$$
$$= \int_{\Phi} d\lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Phi} \lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) ds.$$

هنا استخدمنا تعريف $\mathbf{H}$ ، ثم (١٤٤) مع $\mathbf{H}$ بدلاً من $\mathbf{F}$، ثم (١٤٦)، ثم –الخطوة الرئيسية – المبرهنة ١٠، ٣٣، وأخيراً (١٤٣)، ممتدة بالطريقة الواضحة من المنحنيات إلى السلاسل -1.

١٠، ٥١ مبرهنة التباعد The divergence

إذا كانت $\mathbf{F}$ حقلاً متجهاً من الصنف C' في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^3$ وإذا كانت Ω مجموعة جزئية مغلقة لـ E بقيد متوجه إيجابياً $\partial\Omega$ (كما مذكور في الجزء ١٠، ٣١) فإن

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dA \ . \tag{١٤٧}$$

البرهان: استناداً إلى (١٢٥)،

$$d\omega_{\mathbf{F}} = (\nabla \cdot \mathbf{F}) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV \ .$$

إذن

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \int_{\Omega} d\omega_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} \omega_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dA ,$$

استناداً إلى المبرهنة ١٠، ٣٣، مطبقة على الصيغة -2 $\omega_{\mathbf{F}}$، و(١٤٤).

تمارين EXERCISES

١- لتكن H مجموعة متراصة محدبة في $\mathbf{R}^k$، بمنطقة داخلية غير خالية. لتكن $f \in \mathscr{C}(H)$، ضع $f(\mathbf{x}) = 0$ في قيمة H، وعرف $\int_H f$ كما في التعريف ١٠، ٣.

برهن على أن $\int_H f$ لا تعتمد على الترتيب الذي تتميز فيه عمليات التكامل الـــ k.

تلميح : قرب f بالدوال المستمرة في $\mathbf{R}^k$ والتي تقع دعاماتها في H، كما فعلنا في المثال ١٠، ٤.

٢- بالنسبة إلى $i = 1,2,3,\ldots$، لتكن $\varphi_1 \in \mathscr{C}(\mathbf{R}^1)$ تمتلك دعامة في $(2^{-i}, 2^{1-i})$، بحيث أن $\int \varphi_i = 1$. ضع

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)]\varphi_i(y)$$

عندها فإن f تمتلك دعامة متراصة في $\mathbf{R}^2$، f مستمرة ما عدا في $(0,0)$، و

$\int dy \int f(x,y)dx = 0$ لكن $\int dx \int f(x,y)dy = 1$.

لاحظ بأن f غير مقيدة في كل جوار لـــ $(0,0)$.

٣- (أ) إذا كانت F كما في المبرهنة ١٠، ٧ ، ضع $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$، $\mathbf{A} = \mathbf{F}'(0)$. عندها فإن $\mathbf{F}_1'(0) = I$. بين أن

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}).$$

في بعض المناطق المجاورة لـــ 0، لبعض التطبيقات الأولية $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_n$. يقدم ذلك نسخة أخرى للمبرهنة ١٠، ٧ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(0)\mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x})$$

(ب) برهن أن التطبيق $(x,y) \to (y,x)$ لـــ $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}^2$ لا يكون المركب لأي تطبيقين أولين، في أي جوار لنقطة الأصل. (يبين هذا أن التقلبات flips B_i لا يمكن حذفها من نص المبرهنة ١٠، ٧).

٤- بالنسبة لأي $(x,y) \in \mathbf{R}^2$، عرف

$$\mathbf{F}(x,y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y).$$

برهن على أن $\mathbf{F} = \mathbf{G}_2 \circ \mathbf{G}_1$، حيث أن

$$\mathbf{G}_1(x,y)=(e^x\cos y-1,y)$$
$$\mathbf{G}_2(u,v)=(u,(1+u)\tan v)$$

أولية في بعض المناطق المجاورة لـ $(0,0)$.

احتسب الجاكوبينات لـ $\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\mathbf{F}$ في $(0,0)$. عرف

$$\mathbf{H}_2(x,y)=(x,e^x\sin y)$$

وعرف

$$\mathbf{H}_1(u,v)=(h(u,v),v)$$

بحيث أن $\mathbf{F}=\mathbf{H}_1\circ\mathbf{H}_2$ في بعض المناطق المجاورة لـ $(0,0)$.

٥- قم بصياغة وبرهنة مثيل للمبرهنة ١٠، ٨ ، يكون فيه K مجموعة جزئية متراصة لفضاء متري عشوائي. (استبدل الدوال φ_i التي في برهان المبرهنة ١٠، ٨ بدوال من النوع الذي شكلناه في التمرين ٢٢ من الفصل الرابع).

٦- عزز استنتاج المبرهنة ١٠، ٨ ببيان أنه يمكن جعل الدوال ψ_i قابلة للتفاضل، وحتى قابلة للتفاضل بشكل غير منتهى (استخدم التمرين ١ من الفصل الثامن بتشكيل الدوال الإضافية φ_i).

٧- (أ) بين أن المفردة $\mathbf{Q}^k$ هي اصغر مجموعة جزئية محدبة لـ $\mathbf{R}^k$ التي تحتوي على $\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k$.

(ب) بين أن التطبيق المتآلف يأخذ المجاميع المحدبة إلى المجموعات المحدبة.

٨- لتكن H المتوازي الأضلاع في $\mathbf{R}^2$ الذي رؤوسه هي $(1,1),(3,2),(4,5),(2,4)$. أوجد التطبيق المتآلف T الذي يرسل $(0,0)$ إلى $(1,1)$، $(1,0)$ إلى $(3,2)$، $(0,1)$ إلى $(2,4)$. بين أن $J_T=5$. استخدم T لتحويل المتكامل

$$\alpha=\int_H e^{x-y}\,dx\,dy$$

إلى متكامل فوق I^2 ومن ثم احتسب α.

٩- عرف $(x,y)=T(r,\theta)$ في المثلث

$$0\le r\le a,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

بالمعادلتين

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\ .$$

بين أن T تطبيق هذا المثلث في القرص المغلق D الذي مركزه في $(0,0)$ ونصف قطره a،

وأن T هي واحد – لـ – واحد في المنطقة الداخلية للمثلث، وأن $J_T(r,\theta)=r$. إذا كانت $f\in \mathcal{C}(D)$ ، برهن صيغة التكامل في الإحداثيات القطبية :

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^a\int_0^{2\pi} f(T(r,\theta))r\,dr\,d\theta \ .$$

تلميح : لتكن D_0 المنطقة الداخلية لـD، ناقصاً الفترة من (0,0) إلى $(0,a)$. تنطبق المبرهنة ١٠، ٩، بنفس وضعتها، على الدوال المستمرة f التي تقع دعامتها في D_0 . لإزالة هذا التقيد، أستمر كما في المثال ١٠، ٤.

١٠– لتكن $a\to\infty$ في التمرين ٩، برهن على إن

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)dxdy=\int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(T(r,\theta))rdrd\theta\,,$$

بالنسبة للدوال المستمرة f التي تتناقص بسرعة كافية عندما $|x|+|y|\to\infty$. أوجد صيغة أكثر دقة). طبق ذلك على

$$f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$$

لاشتقاق الصيغة (١٠١) من الفصل الثامن.

١١– عرف $(u,v)=T(s,t)$ في الشريط

$$0<s<\infty,\qquad 0<t<1$$

بوضع $u=s-st, v=st$ بين أن T تطبيقاً 1-1 للشريط في ربع الدائرة ***quadrant*** الموجب Q في $\mathbf{R}^2$. بين أن $J_T(s,t)=s$.

بالنسبة إلى $x>0, y>0$ ، كامل

$$u^{x-1}e^{-u}v^{y-1}e^{-v}$$

فوق Q، استخدم المبرهنة ١٠، ٩ لتحويل المتكامل إلى متكامل فوق الشريط، واشتق الصيغة (٩٦) من الفصل الثامن بهذه الطريقة.

(بالنسبة إلى هذا التطبيق، يجب توسيع المبرهنة ١٠، ٩ لتغطي بعض المتكاملات الغير طبيعية. قم بهذا التوسيع).

١٢– لتكن I^k مجموعة جميع ألـ $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_k)\in\mathbf{R}^k$ بـ $0\le u_i\le 1$ بالنسبة لجميع i؛ ولتكن Q^k مجموعة جميع ألـ $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbf{R}^k$ بـ $x_i\ge 0, \sum x_i\le 1$. (I^k هو مكعب الوحدة ; Q^k هو المفردة القياسية في $\mathbf{R}^k$).

عرف $\mathbf{x}=T(\mathbf{u})$ بـ

$$x_1 = u_1$$
$$x_2 = (1-u_1)u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_k = (1-u_1)\cdots(1-u_{k-1})u_k.$$

بين أن

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1-\prod_{i=1}^{k}(1-u_i) \ .$$

بين أن T تطبق I^k في Q^k، إن T هي 1-1 في المنطقة الداخلية لــ I^k، وإن مقلوبها S معرف في المنطقة الداخلية لــ Q^k بــ $u_1 = x_1$ و

$$u_i = \frac{x_i}{1-x_1-\cdots-x_{i-1}}$$

بالنسبة إلى $i = 2,\ldots,k$. بين أن

$$J_T(\mathbf{u}) = (1-u_1)^{k-1}(1-u_2)^{k-2}\ldots(1-u_{k-1}) \, ,$$

و

$$J_s(\mathbf{x}) = \left[(1-x_1)(1-x_1-x_2)\cdots(1-x_1-\cdots-x_{k-1})\right]^{-1} \ .$$

١٣- لتكن $r_1,\ldots,r_k$ أعداداً صحيحة غير سالبة، وبرهن إن

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}\,dx = \frac{r_1!\cdots r_k!}{(k+r_1+\cdots+r_k)!}$$

تلميح : استخدم التمرين ١٢، المبرهنتين ١٠، ٩ و ٢٠، ٨.

لاحظ بأن الحالة الخاصة $r_1 = \cdots = r_k = 0$ تبين أن حجم Q^k هو $1/k!$.

١٤- برهن الصيغة (٤٦).

١٥- إذا كانت ω و λ صيغتين k - وm، على التوالي، برهن إن

$$\omega\wedge\lambda = (-1)^{km}\lambda\wedge\omega \ .$$

١٦- إذا كانت $k \geq 2$ و $\sigma = \left[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_k\right]$ منفردة k- متآلفة متوجهه، برهن أن $\partial^2\sigma = 0$، بصورة مباشرة من التعريف المؤثر المقيد ∂. استنتج من ذلك أن $\partial^2\Psi = 0$ لكل سلسلة Ψ.

تلميح : بالنسبة إلى التوجيه، قم بها أولاً بالنسبة إلى $k = 3, k = 2$. بشكل عام، إذا كانت $i < j$، لتكن σ_{ij}المفردة - $(k-2)$ التي نحصل عليها بحذف $\mathbf{p}_i$ و $\mathbf{p}_j$

من σ بين أن كل σ_{ij} تحدث مرتين في $\partial^2\sigma$، بإشارة معاكسة.

١٧- ضع $J^2 = \tau_1 + \tau_2$، حيث

$$\tau_1 = [0, e_1, e_1 + e_2], \qquad \tau_2 = -[0, e_2, e_2 + e_1] .$$

من المعقول أن نسمي J^2 مربع الوحدة المتوجه إيجابياً في $\mathbf{R}^2$. بين لماذا ؟

بين أن ∂J^2 هي مجموع أربعة مفردات -1 متآلفة متوجهه. أوجد هذه المفردات. ما هو $\partial(\tau_1 - \tau_2)$ ؟

١٨- لاحظ المفردة -3 المتآلفة المتوجه

$$\sigma_1 = [0, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$$

في $\mathbf{R}^3$. بين أن σ_1 (باعتبارها تحويل خطي) تمتلك محددة 1. لذلك فإن σ_1 متوجيه إيجابياً.

لتكن $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ خمسة مفردات-3 متوجهه أخرى، نحصل عليها كالآتي: يوجد هنالك خمسة تغييرات ممكن إجراؤها في تباديل (i_1, i_2, i_3) لـ $(1,2,3)$ تختلف عن $(1,2,3)$.

عين لكل (i_1, i_2, i_3) المفردة

$$s(i_1, i_2, i_3)[o, e_{i_1}, e_{i_1} + e_{i_2}, e_{i_1} + e_{i_2} + e_{i_3}]$$

حيث أن s هي الإشارة التي تحدث في تعريف المحددة. (هذه هي الطريقة التي حصلنا بموجبها على τ_2 من τ_1 في التمرين ١٧).

بين أن $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ تكون موجهه موجبة.

ضع $J^3 = \sigma_1 + \cdots + \sigma_6$. عندها فإننا قد نطلق على J^3 مكعب الوحدة المتوجهة إيجابيا في $\mathbf{R}^3$.

بين أن ∂J^3 مجموع ١٢ مفردة -2 متآلف متوجهة. (تغطي هذه ألـ ١٢ مثلث سطح الوحدة I^3).

بين أن $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ هي مدى σ_1 إذا وإذا فقط كانت $0 \le x_3 \le x_2 \le x_1 \le 1$.

بين أن $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ تمتلك مناطق داخلية منفصلة، وإن اتحادهما تغطي I^3. (قارن مع التمرين ١٣؛ لاحظ بأن 6=!3).

١٩- لتكن J^2 و J^3 كما في التمرينين ١٧ و١٨. عرف

$$B_{01}(u,v)=(0,u,v),\qquad B_{11}(u,v)=(1,u,v),$$
$$B_{02}(u,v)=(u,0,v),\qquad B_{12}(u,v)=(u,1,v),$$
$$B_{03}(u,v)=(u,v,0),\qquad B_{13}(u,v)=(u,v,1).$$

هذه هي متآلفة وتطبق $\mathbf{R}^2$ في $\mathbf{R}^3$.

ضع $\beta_{ri}=B_{ri}(J^2)$، بالنسبة إلى $r=0,1$ ، $i=1,2,3$. كل β_{ri} هي سلسلة 2– متآلفة – متوجهه (راجع البند ١٠، ٣٠). اثبت أن

$$\partial\, J^3=\sum_{i=1}^{3}(-1)^i(\beta_{0i}-\beta_{1i}),$$

توافقاً مع التمرين ١٨.

٢٠– أذكر الشروط التي تتحقق بموجبها الصيغة

$$\int_\Phi f\,d\omega=\int_{\partial\Phi}f\omega-\int_\Phi(df)\wedge\omega\,,$$

وبين أنها تعميم صيغة التكامل بالتجزئة.

تلميح : $d(f\omega)=(df)\wedge\omega+f\,d\omega$.

٢١– كما في المثال ١٠، ٣٦، لاحظ الصيغة – 1

$$\eta=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

في $\mathbf{R}^2-\{0\}$.

(أ) قم بالخطوات التي تؤدي إلى الصيغة (١١٣)، برهن أن $d\eta=0$.

(ب) لتكن $\gamma(t)=(r\cos t,-r\sin t)$، بالنسبة لبعض $r>0$ ولتكن Γ منحنياً – C'' في $\mathbf{R}^2-\{0\}$، بفترة وسيطة $[0,2\pi]$، بـــ $\Gamma(0)=\Gamma(2\pi)$، بحيث أن الفترات $[\gamma(t),\Gamma(t)]$ لا تحتوي على 0 لأي $t\in[0,2\pi]$. برهن أن

$$\int_\gamma\eta=2\pi.$$

تلميح : بالنسبة إلى $0\le t\le 2\pi$, $0\le u\le 1$، عرف

$$\Phi(t,u)=(1-u)\Gamma(t)+u\gamma(t).$$

عندها فإن Φ سطحاً –2 في $\mathbf{R}^2-\{0\}$ التي منطلقها الوسيط هو المستطيل المذكور. بسبب الحذف (كما في المثال ١٠، ٣٢)، فإن

$$\partial\,\Phi=\Gamma-\gamma$$

استخدم مبرهنة ستوك لاستنتاج أن

$$\int_\Gamma \eta = \int_\gamma \eta$$

بسبب $d\eta = 0$.

(ج) خذ $\Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ حيث أن $b > 0, a > 0$ ثابتتين. استخدم (ب) لبيان أن

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = 2\pi.$$

(د) بين أن

$$\eta = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

في أي مجموعة مفتوحة محدبة يكون فيها $x \neq 0$، وإن

$$\eta = d\left(-\arctan\frac{x}{y}\right)$$

في أي مجموعة مفتوحة محدبة يكون فيها $y \neq 0$.

بين لماذا يبرز ذلك الترميز $\eta = d\theta$، على الرغم من كون η ليست دقيقة في $\mathbf{R}^2 - \{0\}$.

(هـ) بين أنه يمكن اشتقاق (ب) من (د).

(و) إذا كانت Γ أي منحني $-\mathscr{C}'$ مغلق في $\mathbf{R}^2 - \{0\}$، برهن إن

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \eta = \mathrm{Ind}(\Gamma).$$

(راجع التمرين ٢٣ الفصل الثامن بالنسبة لتعريف دليل المنحني).

٢٢- كما في المثال ١٠، ٣٧، عرف ζ في $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ بـ

$$\zeta = \frac{x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy}{r^3}$$

حيث $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$، لتكن D المثلث المعرف بـ $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$، ولتكن Σ السطح -2 في $\mathbf{R}^3$، بمنطلق وسيط D، معرف بـ

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u.$$

(أ) برهن أن $d\zeta = 0$ في $\mathbf{R}^3 - \{0\}$.

(ب) لتكن S ترمز إلى تقييد restriction Σ للمنطلق الوسيط $E \subset D$. برهن أن

$$\int_S \zeta = \int_E \sin u \, du \, dv = A(S),$$

حيث ترمز A إلى المساحة، كما في ١٠، ٣٤. لاحظ بأن هذا يحتوي على (١١٥) كحالة خاصة.

(ج) أفترض أن g, h_1, h_2, h_3، دوالاً $-\mathcal{C}''$ في $[0,1]$, $g > 0$. لتكن $(x,y,z) = \Phi(s,t)$ تعرف سطحاً -2 Φ بمنطلق وسيط I^2، استناداً إلى

$$x = g(t)h_1(s), \quad y = g(t)h_2(s), \quad z = g(t)h_3(s).$$

برهن، بشكل مباشر من (٣٥)، أن

$$\int_\Phi \zeta = 0.$$

لاحظ شكل Φ: بالنسبة إلى s الثابتة، $\Phi(s,t)$ عبر فترة في الخط المستقيم عبر 0. لذلك فإن مدى Φ يقع في "المخروط " " cone " الذي رأسه في نقطة الأصل.

(د) لتكن E مثلث مغلق في D، بحافات موازية إلى حافات D. افترض $f > 0, f \in \mathcal{C}''(D)$. لتكن Ω السطح -2 بمنطلق وسيط E، معرف بـــ

$$\Omega(u,v) = f(u,v)\sum(u,v)$$

عرف S كما في (ب) وبرهن إن

$$\int_\Omega \xi = \int_S \xi = A(S).$$

(بما أن S "مسقط نصف قطري radial projection" لـــ Ω في كرة الوحدة، فإن هذه النتيجة تجعل $\int_\Omega \xi$ "الزاوية الصلبة" "solid angle" المقابلة لمدى Ω في نقطة الأصل، أمراً منطقياً).

تلميح : لاحظ السطح -3 Ψ المتمثل بـــ

$$\Psi(t,u,v) = [1 - t + tf(u,v)]\sum(u,v) \quad .$$

حيث أن $0 \le t \le 1, (u,v) \in E$. بالنسبة إلى v الثابتة فإن التطبيق $(t,u) \to \Psi(t,u,v)$ هو السطح-2 Φ الذي نستطيع تطبيق (ج) علية لنبين أن $\int_\Phi \xi = 0$. نفس الشيء يتحقق عندما تثبت u. استناداً إلى (أ) ومبرهنة ستوك،

$$\int_{\partial\Psi}\xi = \int_{\Psi} d\xi = 0 \ .$$

(هـ) ضع $\lambda = -(z/r)\eta$، حيث

$$\eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \ ,$$

كما في المثال ٢١. عندها فإن λ صيغة -1 في المجموعة المفتوحة $V \subset \mathbf{R}^3$ التي يكون فيها $x^2 + y^2 > 0$. بين أن ξ دقيقة في V ببيان إن

$.\xi = d\lambda$

(و) اشتق (د) من(هـ)، بدون استخدام (ج).

تلميح : في البداية، افترض إن $0 < u < \pi$ في E. استناداً إلى (هـ)،

$$\int_S \xi = \int_{\partial S}\lambda \quad \text{و} \quad \int_{\Omega}\xi = \int_{\partial\Omega}\lambda$$

بين أن متكاملي λ متساويتين، باستخدام التمرين ٢١ (د)، وبملاحظة إن z/r تكون نفسها في $\sum(u,v)$ وفي $\Omega(u,v)$.

(ز) هل إن ξ دقيقة في متممة كل خط مستقيم يمر عبر نقطة الأصل ؟

٢٣- قم بتثبيت n . عرف $r_k = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}$ بالنسبة إلى $1 \le k \le n$، لتكن E_k مجموعة جميع الـ $x \in \mathbf{R}^n$ التي يكون فيها $r_k > 0$، ولتكن ω_k الصيغة - (k-1) المعرفة في E_k بـ

$$\omega_k = (r_k)^{-k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k .$$

لاحظ بأن $\omega_2 = \eta$ ، $\omega_3 = \zeta$، وفق مصطلحات التمرينين ٢١ و ٢٢ لاحظ أيضاً بأن

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = \mathbf{R}^n - \{0\}.$$

(أ) برهن أن $d\omega_k = 0$ في E_k.

(ب) بالنسبة إلى $k = 2,\ldots,n$، برهن أن ω_k دقيقة (بالضبط) (exact) في E_{k-1}، ببيان أن

$$\omega_k = d(f_k\omega_{k-1}) = (df_k) \wedge \omega_{k-1},$$

حيث أن $f_k(\mathbf{x}) = (-1)^k g_k(x_k/r_k)$ و

$$g_k(t) = \int_{-1}^{t} (1-s^2)^{(k-3)/2} ds \qquad (-1 < t < 1).$$

تلميح : تحقق f_k المعادلات التفاضلية

$$\mathbf{x} \cdot (\nabla f_k)(\mathbf{x}) = 0$$

و

$$.(D_k f_k)(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^k (r_{k-1})^{k-1}}{(r_k)^k}$$

(ج) هل إن ω_n دقيقة في E_n ؟

(د) لاحظ بأن (ب) هي تعميم للجزء (هـ) من التمرين ٢٢. حاول توسيع بعض التأكيدات الأخرى للتمرين ٢١ و٢٢ لـ ω_n، بالنسبة إلى n عشوائية.

٢٤- لتكن $\omega = \sum a_i(\mathbf{x})dx_i$ صيغة -1 من الصنف $\mathcal{C}'$ في المجموعة المحدبة $E \subset \mathbf{R}^n$ أفترض أن $d\omega = 0$ وبرهن أن ω دقيقة في E، باتباع الخطوات الآتية :

ثبت $\mathbf{p} \in E$. عرف

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[\mathbf{p},\mathbf{x}]} \omega \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

طبق مبرهنة ستوك على المفردات -2 المتآلفة - المتوجهة $[\mathbf{p},\mathbf{x},\mathbf{y}]$ في E. استنتج أن

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 a_i((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y})dt$$

بالنسبة إلى $\mathbf{x} \in E,\ \mathbf{y} \in E$. إذن $(D_i f)(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x})$.

٢٥- أفترض أن ω صيغة -1 في المجموعة المفتوحة $E \subset \mathbf{R}^n$ بحيث أن

$$\int_\gamma \omega = 0$$

لكل منحني مغلق γ في E، من الصنف $\mathcal{C}'$. برهن أن ω دقيقة في E، بتقليد جزء من النقاش المذكور في التمرين ٢٤.

٢٦- أفترض أن ω صيغة -1 في $\mathbf{R}^3 - \{0\}$، من الصنف $\mathcal{C}'$ وإن $d\omega = 0$. برهن أن ω دقيقة في $\mathbf{R}^3 - \{0\}$.

تلميح: إن كل منحني مغلق قابل للتفاضل ومشتقته مستمرة في $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ يكون القيد للسطح- 2 في $\mathbf{R}^3 - \{0\}$. قم بتطبيق مبرهنة ستوك والتمرين ٢٥.

٢٧- لتكن E خلية -3 مفتوحة في $\mathbf{R}^3$ بحافات موازية للمحاور الإحداثيات. أفترض أن

$(a,b,c) \in E$، $f_i \in \mathcal{C}'(E)$ بالنسبة $i = 1,2,3,$

$$\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy,$$

وأفترض أن $d\omega = 0$ في E. عرف

$$\lambda = g_1 dx + g_2 dy$$

حيث أن

$$g_1(x,y,z) = \int_c^z f_2(x,y,s)ds - \int_b^y f_3(x,t,c)dt$$

$$g_2(x,y,z) = -\int_c^z f_1(x,y,s)ds,$$

بالنسبة إلى $(x,y,z) \in E$. برهن أن $d\lambda = \omega$ في E.

قيم هذه المتكاملات عندما تكون $\omega = \zeta$ ومن ثم أوجد الصيغة λ التي تحدث في الجزء (هـ) من التمرين ٢٢.

٢٨- قم بتثبيت $b > a > 0$، عرف

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

بالنسبة إلى $a \le r \le b$, $0 \le \theta \le 2\pi$. (إن مدى Φ هو حلقة **annulus** في $\mathbf{R}^2$)

ضع $\omega = x^3 dy$، و احسب كلاً من

$$\int_\Phi d\omega \quad , \quad \int_{\partial\Phi} \omega$$

لإثبات أنهما متساويين.

٢٩- برهن وجود الدالة α التي تمتلك الخواص اللازمة في تعريف المبرهنة ١٠، ٣٨ ، وبرهن أن الدالة F الناتجة عن ذلك تكون من الصنف $\mathcal{C}'$. (كلا التأكيدين يصبح عديم المعنى إذا كانت E خلية مفتوحة، أو كرة مفتوحة، نظراً لأنه بالإمكان أن α ثابتة حينها. راجع المبرهنة ٩، ٤٢).

٣٠- إذا كانت $\mathbf{N}$ المتجه المقدم في (١٣٥)، برهن أن

$$det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{bmatrix} = |\mathbf{N}|^2.$$

اثبت أيضاً المعادلة (١٣٧).

٣١- لتكن $E \subset \mathbf{R}^3$ مفتوحة، أفترض أن $g \in \mathcal{C}''(E)$, $h \in \mathcal{C}''(E)$، ولاحظ حقل

المتجه

$$\mathbf{F} = g\nabla h.$$

(أ) برهن أن

$$\nabla \cdot F = g\nabla^2 h + (\nabla g)\cdot(\nabla h)$$

حيث أن $\nabla^2 h = \nabla\cdot(\nabla h) = \Sigma\partial^2 h/\partial x_i^2$ هو ما يسمى الــ "لابلاسين" "Laplacian" لــ h.

(ب) إذا كانت Ω مجموعة جزئية مغلقة لــ E بقيد متوجهه إيجابياً $\partial\Omega$ (كما في المبرهنة ١٠، ٥١)، برهن أن

$$\int_\Omega [g\nabla^2 h + (\nabla g)\cdot(\nabla h)]dV = \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial h}{\partial n}dA \ .$$

حيث أننا كتبنا (وكما هو مألوف) $\partial h/\partial n$ بدلاً من $(\nabla h)\cdot\mathbf{n}$ (لذلك فإن $\partial h/\partial n$ هي المشتقة المتجه لــ h باتجاه العمود الخارجي لــ $\partial\Omega$، يطلق عليها ***المشتقة العمودية*** لــ h ***normal derivative of h***). أستبدل g وh، اطرح الصيغة الناتجة من الصيغة الأولى، لتحصل على

$$.\int_\Omega (g\nabla^2 h - h\nabla^2 g)dV = \int_{\partial\Omega}\left(g\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{dg}{\partial n}\right)dA$$

غالباً ما يطلق على هاتين الصيغتين متطابقتين كرين ***Green's identities***.

(ج) افترض إن h توافقية ***harmonic*** في E ؛ يعني هذا إن $\nabla^2 h = 0$. خذ $g = 1$ واستنتج إن

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial h}{\partial n}dA = 0 \ .$$

خذ $g = h$، واستنتج إن h =0 في Ω إذا كانت $h = 0$ في $\partial\Omega$.

(د) بين أن متطابقات كرين تتحقق أيضاً في $\mathbf{R}^2$.

٣٢- قم بتثبيت δ، $0 < \delta < 1$. لتكن D مجموعة جميع $(\theta, t) \in \mathbf{R}^2$ بحيث أن $-\delta \le t \le \delta, 0 \le \theta \le \pi$. لتكن Φ السطح -2 في $\mathbf{R}^3$، بمنطلق وسيط D، مقدم بــ

$$x = (1 - t\sin\theta)\cos 2\theta$$
$$y = (1 - t\sin\theta)\sin 2\theta$$
$$z = t\cos\theta$$

حيث أن $(x,y,z)=\Phi(\theta,t)$. لاحظ إن $\Phi(\pi,t)=\Phi(0,-t)$، وإن Φ واحد-لـ- واحد فيما تبقى من D.

يسمى المدى $M=\Phi(D)$ شريط موبيس ***Mobius band*** وهو أبسط مثال على السطوح الغير قابلة للتوجيه.

برهن التأكيدات المتعددة الموجودة في الوصف أدناه: ضع

$\mathbf{p}_1=(0,-\delta), \mathbf{p}_2=(\pi,-\delta), \mathbf{p}_3=(\pi,\delta), \mathbf{p}_4=(0,\delta), \mathbf{p}_5=\mathbf{p}_1$. ضع $\gamma_i=[\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1}]$، $i=1,\ldots,4$، وضع $\Gamma_i=\Phi\circ\gamma_i$. عندها فإن

$$\partial\Phi=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4\ .$$

ضع $\mathbf{a}=(1,0,-\delta), \mathbf{b}=(1,0,\delta)$. عندها فإن

$$\Phi(\mathbf{p}_1)=\Phi(\mathbf{p}_3)=\mathbf{a},\qquad \Phi(\mathbf{p}_2)=\Phi(\mathbf{p}_4)=\mathbf{b},$$

ويمكن وصف $\partial\Phi$ كالتالي.

تتسلق Γ_1 من **a** إلى **b**، مسقطها إلى (x,y)- يمتلك عدداً لولبياً **+1 winding number** حول نقطة الأصل. (راجع التمرين ٢٣، الفصل الثامن).

$$\Gamma_2=[\mathbf{b},\mathbf{a}].$$

تتسلق Γ_3 من **a** إلى **b**، مسقطها في المستوي $-(x,y)$ يمتلك عدداً لولبياً **1-** حول نقطة الأصل.

$$\Gamma_4=[\mathbf{b},\mathbf{a}].$$

لذلك فإن $\partial\Phi=\Gamma_1+\Gamma_3+2\Gamma_2$.

إذا تحركنا من **a** إلى **b** عبر Γ_1 واستمرينا على طول "حافة " لـ M **of"edge"** حتى نرجع إلى **a**، فإن المنحني الذي أتبعناه هو

$$\Gamma=\Gamma_1-\Gamma_3,$$

والذي قد يمثل أيضاً في الفترة الوسيطة $[0,2\pi]$ بواسطة المعادلات

$$x=(1+\delta\sin\theta)\cos2\theta$$
$$y=(1+\delta\sin\theta)\sin2\theta$$
$$z=-\delta\cos\theta.$$

يجب إن نؤكد إن $\Gamma\neq\partial\Phi$: لتكن η الصيغة - **1**التي ناقشناها في التمرينين ٢١ و ٢٢. بما أن $d\eta=0$، فإن مبرهنة ستوك تبين لنا

$$\int_{\partial\Phi} \eta = 0.$$

ولكن على الرغم من إن Γ هي القيد "الهندسي" لـ M boundary of "geometric" فإن لدينا

$$.\int_{\Gamma} \eta = 4\pi$$

لأجل تلافي هذا المصدر المحتمل للإرباك، فإن صيغة ستوك (المبرهنة ١٠، ٥٠) غالباً ما تنص على السطوح القابلة للتوجهة Φ.

الفصل الحادي عشر

نظرية لبيــك

- دوال المجموعة
- تكوين مقياس لبيك
- فضاءآت القياس
- الدوال القابلة للقياس
- الدوال البسيطة
- التكامل
- المقارنة مع متكامل ريمان
- تكامل الدوال المركبة
- دوال من الصنف L^2
- تمارين

الفصل الحادي عشر
نظرية ليبــك
The Lebesgue Theory

يهدف هذا الفصل إلى تقديم المفاهيم الأساسية لنظرية ليبك للقياس والتكامل ولبرهنة بعض المبرهنات المهمة بإطارها العام، بدون طمس الخطوة الرئيسية للموضوع بالتفاصيل الكثيرة العديمة الأهمية.. لذلك فإننا سنقدم بعض البراهين بشكل مختصر في بعض الحالات، في حين سنذكر بعض الفرضيات السهلة بدون برهان. إن القارئ الذي استوعب الأساليب المستخدمة في الفصول السابقة، سوف لن يجد أية مشكلة بتكملة الخطوات الناقصة.

بالإمكان تطوير نظرية متكامل ليبك بعدة طرق منفصلة. وسوف نستخدم طريقة واحدة فقط من هذه الطرق في نقاشنا هنا. نشير إلى الكتب المذكورة في المراجع بالنسبة إلى الطرق المتخصصة الأخرى في حسابات التكامل.

دوال المجموعة Set Functions

إذا كانت A و B أية مجموعتين، فإننا نكتب $A-B$ بالنسبة إلى مجموعة العناصر x بحيث أن $x \notin B, x \in A$. إن الرمز $A-B$ لا يؤدي إلى إن $B \subset A$. نرمز إلى المجموعة الخالية بـــ 0، ونقول أن A و B منفصلتان إذا كانت $A \cap B = 0$.

١١، ١ تعريف: تسمى العائلة $\mathscr{R}$ من المجموعات "حلقة" "**ring**" إذا كانت $A \in \mathscr{R}$ و $B \in \mathscr{R}$ تؤدي إلى إن

$$A \cup B \in \mathscr{R}, \qquad A-B \in \mathscr{R} . \tag{١}$$

بما أن $A \cap B = A-(A-B)$ ، لذلك يكون لدينا $A \cap B \in \mathscr{R}$ إذا كانت $\mathscr{R}$ هي حلقة.

تسمى الحلقة $\mathscr{R}$ "حلقة – σ" $\sigma - ring$ إذا كان

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R} \tag{٢}$$

كلما كان $A_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1,2,3,...)$. بما أن

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

فإن لدينا أيضاً

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

إذا كانت $\mathcal{R}$ حلقة - σ.

١١، ٢ تعريف: نقول أن ϕ دالة مجموعة معرفة في $\mathcal{R}$ إذا كانت ϕ تعين لكل $A \in \mathcal{R}$ العدد $\phi(A)$ من المنظومة الموسعة للأعداد الحقيقية. تكون ϕ *تجميعية* ***additive*** إذا كانت $A \cap B = 0$ تؤدي إلى إن

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B), \tag{٣}$$

وتكون ϕ *قابلة للعد تجميعياً* ***countably additive*** إذا كانت $A_i \cap A_j = 0$ $(i \neq j)$ تؤدي إلى أن

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{٤}$$

سوف نفترض دائماً أن مدى ϕ لا يحتوي على كل من $+\infty$ و $-\infty$ ؛ وذلك لأنه خلافاً لذلك، قد يصبح الجانب الأيمن من (٣) عديم المعنى. وكذلك، فإننا سوف نستثني دوال المجموعة التي قيمها الوحيدة هي $+\infty$ أو $-\infty$.

يجدر الإشارة إلى أن الجانب الأيسر من (٤) لا يعتمد على الترتيب الذي تقع فيه A_n. إذن فإن مبرهنة إعادة الترتيب تبين أنه إذا كان الجانب الأيمن من (٤) يتقارب، فإنه يتقارب بشكل مطلق ؛ وإذا لم يكن يتقارب، فإن المجموعات الجزئية تؤدي إلى أن $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كانت ϕ تجميعية، فإن الخصائص الآتية سهلة التحقيق:

$$\phi(0) = 0 . \tag{٥}$$

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n) \tag{٦}$$

إذا كانت $A_i \cap A_j = 0$ كلما كانت $i \neq j$.

$$\phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2) . \tag{٧}$$

إذا كانت $\phi(A) \geq 0$ لجميع A، و $A_1 \subset A_2$ ، فإن

$$\phi(A_1) \leq \phi(A_2) . \tag{٨}$$

بسبب (٨)، غالباً ما يطلق على دوال المجموعة الغير سلبية الجمع بأنها رتيبة **monotonic**.

$$\phi(A-B)=\phi(A)-\phi(B) \qquad (٩)$$

إذا كانت $B \subset A$ ، و $|\phi(B)| < +\infty$.

١١ ، ٣ مبرهنة: *لنفترض أن ϕ قابلة للعد تجميعياً في الحلقة $\mathcal{R}$. لنفترض أن $A_n \in \mathcal{R}$*

$(n=1,2,3,\ldots)$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots, A \in \mathcal{R}$ و

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \, .$$

عندما، $n \to \infty$ *، فإن*

$$\phi(A_n) \to \phi(A) \, .$$

البرهان: ضع $B_1 = A_1$ ، و

$$B_n = A_n - A_{n-1} \quad (\mathrm{n}=2,3,\ldots) \, .$$

عندها فإن $B_i \cap B_j = 0$ بالنسبة إلى $i \neq j$ ، $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ ، و $A = \bigcup B_n$. إذن

$$\phi(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\phi(B_i)$$

و

$$\phi(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\phi(B_i).$$

تكوين مقياس لبيك

Construction Of The Lebesgue Measure

١١ ، ٤ تعريف: لتكن R^p نرمز إلى الفضاء الإقليدي الــ الأبعاد-p **p-dimensional**.

نقصد بــ *الفترة* ***interval*** في R^p تلك المجموعة التي تضم النقاط $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_p)$ بحيث أن

$$a_i \le x_i \le b_i \qquad (i=1,\ldots,p) \, , \qquad (١٠)$$

أو مجموعة النقاط الموصوفة في (١٠) باستبدال أي أو كل الإشارات $\le$ بــ $<$. إن احتمالية أن $a_i = b_i$ لأي قيمه من قيم i ليست مستثناة هنا ؛وعلى وجه الخصوص، فإن المجموعة الخالية موجودة ضمن الفترات.

إذا كانت A هي اتحاد عدد منتهى من الفترات، يقال لــ A بأنها مجموعة أولية ***elementary set***.

إذا كان I فترة ما، فإننا نعرف

$$m(I)=\prod_{i=1}^{p}(b_i-a_i),$$

بغض النظر عما إذا كانت المساواة متضمنة أو غير متضمنة في أي من المتباينات (١٠).

إذا كانت $A=I_1\cup\cdots\cup I_n$، وإذا كانت هذه الفترات منفصلة زوجياً، نضع

$$m(A)=m(I_1)+\cdots+m(I_n) \tag{١١}$$

لتكن $\mathcal{E}$ ترمز إلى عائلة جميع المجموعات الجزئية الأولية لـ $\mathbf{R}^p$. في هذه النقطة، يجب تحقيق الخواص الآتية:

تكون $\mathcal{E}$ حلقة، ولكن ليست حلقة $-\sigma$. (١٢)

إذا كانت $A\in\mathcal{E}$، فإن A هي اتحاد عدد منتهي من *الفترات المنفصلة* ***disjoint intervals***. (١٣)

إذا كانت $A\in\mathcal{E}$، $m(A)$ معرفة جيداً بـ (١١)، أي أنه، إذا استخدم (١٤)
تحليلين منفصلين لـ A في فترتين منفصلتين، فإن كلاً منهما سيعطي نفس القيمة لـ $m(A)$.

تكون m تجميعية في $\mathcal{E}$. (١٥)

لاحظ بأنه إذا كانت $p=1,2,3$، فإن m تكون طول، مساحة، حجم على التوالي.

١١، ٥ تعريف: يقال لدالة المجموعة الغير سلبية الجمع ϕ المعرفة في $\mathcal{E}$ بأنها *نظامية* ***regular*** إذا صح ما يلي: لكل $A\in\mathcal{E}$ ولكل $\varepsilon>0$ يوجد هنالك مجموعتين $F\in E$, $G\in E$ بحيث أن F مغلقة، G مفتوحة، $F\subset A\subset G$، و

$$\phi(G)-\varepsilon\le\phi(A)\le\phi(F)+\varepsilon. \tag{١٦}$$

١١، ٦ أمثلة:

(أ) ***تكون دالة المجموعة m نظامية. The set function m is regular***

إذا كانت A فترة، فإن شرط تحقق متطلبات التعريف ١١،٥ يعتبر عديم القيمة (تافه) **trivial**. الحالة العامة نحصل عليها من (١٣).

(ب) خذ $\mathbf{R}^p=\mathbf{R}^1$، لتكن α الدالة المتزايدة ترتيبياً، المعرفة لجميع x الحقيقية. ضع

$$\mu([a,b))=\alpha(b-)-\alpha(a-).$$
$$\mu([a,b])=\alpha(b+)-\alpha(a-),$$

$$\mu\left((a,b]\right)=\alpha(b+)-\alpha(a+),$$
$$\mu\left((a,b)\right)=\alpha(b-)-\alpha(a+)$$

هنا $[a,b)$ هي المجموعة $a \le x < b$، الخ. بسبب إمكانية عدم استمرارية α، فإن هذه الحالات يجب أن تميز. إذا كانت μ معرفة إلى المجموعات الأولية كما في (١)، فإن μ تكون نظامية في $\mathcal{E}$. برهان ذلك مشابهة لبرهان (أ).

إن هدفنا القادم هو بيان أنه بالإمكان توسيع كل دالة مجموعة نظامية في $\mathcal{E}$ إلى دالة مجموعة قابلة للعد التجميعي في الحلقة – σ التي تحتوي على $\mathcal{E}$.

١١، ٧ تعريف: لتكن μ تجميعية، نظامية، غير سلبية، ومنتهية في $\mathcal{E}$. لاحظ الأغطية القابلة للعد لأي مجموعة $E \subset R^p$ بمجموعات أولية مفتوحة A_n :

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

عرف

$$\mu^*(E)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n), \qquad (١٧)$$

يؤخذ الــ **inf** عبر جميع الأغطية القابلة للعد لــ E بواسطة المجموعات الأولية المفتوحة. تسمى $\mu^*(E)$ *القياس الخارجي* لــ ***outer measure of E***، المتعلق بــ μ .

من الواضح إن $\mu^*(E) \ge 0$ لجميع E وإن

$$\mu^*(E_1)\le\mu^*(E_2) \qquad (١٨)$$

إذا كانت $E_1 \subset E_2$.

١١، ٨ مبرهنة:

(أ) لكل $A \in \mathcal{E}$ $\quad \mu^*(A)=\mu(A)$,

(ب) إذا كانت $E=\bigcup_1^{\infty}E_n$، فإن

$$\mu^*(E)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n) . \qquad (١٩)$$

لاحظ بأن (أ) تؤكد إن μ^* هي امتداد لــ μ من $\mathcal{E}$ إلى عائلة جميع المجموعات الجزئية لــ R^p. يطلق على (١٩) *التجميعية الجزئية* ***subadditivity*** .

البرهان: نختار $A \in \mathcal{E}$ و $\varepsilon > 0$.

تبين نظامية μ إن A محتواة في المجموعة الأولية المفتوحة G بحيث $\mu(G) \le \mu(A) + \varepsilon$. بما أن $\mu^*(A) \le \mu(G)$ وبما أن ε عشوائية، فإن لدينا

$$\mu^*(A) \le \mu(A) \ . \qquad (٢٠)$$

يبين تعريف μ^* أنه يوجد هنالك المتتالية $\{A_n\}$ للمجموعات الأولية المفتوحة التي يحتوي اتحادها على A، بحيث أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon.$$

تبين نظامية μ أن A تحتوي على المجموعة الأولية F بحيث أن $\mu(F) \ge \mu(A) - \varepsilon$ ؛ وبما أن F متراصة، لدينا

$$F \subset A_1 \cup \cdots \cup A_N$$

لبعض N. إذن

$$\mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon \le \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_N) + \varepsilon \le \sum_{1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \le \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

يبرهن هذا، سويةً مع (٢٠)، (أ).

الخطوة التالية، أفترض أن $E = \bigcup E_n$، وأفترض أن $\mu^*(E_n) < +\infty$ بالنسبة لكل n لنأخذ $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك أغطية $\{A_{nk}\}$، و $k = 1,2,3,\ldots$ لـ E_n بمجموعات أولية مفتوحة بحيث

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \le \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon. \qquad (٢١)$$

عندها فإن

$$\mu^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \varepsilon,$$

وتستنتج بذلك (١٩). في الحالة التي استثنيناها، أي، إذا كانت $\mu^*(E_n) = +\infty$ لبعض n، فمن الطبيعي أن (١٩) عديمة المعنى.

١١، ٩ تعريف: لأي $A \subset \mathbf{R}^p$, $B \subset \mathbf{R}^p$، نعرف

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A), \qquad (٢٢)$$

$$d(A,B) = \mu^*(S(A,B)). \tag{٢٣}$$

نكتب $A_n \to A$ إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0.$$

إذا كان يوجد هنالك متتالية $\{A_n\}$ للمجموعات الأولية بحيث أن $A_n \to A$، فإننا نقول قابل للقياس– بصورة منتهية finitely μ - measurable ونكتب $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

إذا كانت A الاتحاد لمجموعة قابلة للعد للمجموعات القابلة للقياس – μ المنتهية، فإننا نقول أن A قابلة للقياس – μ وتكتب $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

$S(A,B)$ هو ما يطلق عليه "الفرق المتناظر" لـ A و B. "symmetric difference" of سوف نلاحظ إن $d(A,B)$ هي في الواقع دالة مسافة.

إن المبرهنة القادمة سوف تمكننا من الحصول على التوسيع المطلوب لـ μ.

١١، ١٠ مبرهنة: $\mathcal{M}(\mu)$ *هي حلقة* – σ، *و* μ^* *قابلة للعد الجمعي في* $\mathcal{M}(\mu)$.

قبل أن ندخل ببرهنة هذه المبرهنة، سوف نبين بعض خواص $S(A,B)$ و $d(A,B)$. لدينا

$$S(A,B) = S(B,A), \qquad S(A,A) = 0. \tag{٢٤}$$

$$S(A,B) \subset S(A,C) \cup S(C,B). \tag{٢٥}$$

$$\left.\begin{matrix} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{matrix}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \tag{٢٦}$$

إن (٢٤) واضحة، ونحصل على(٢٥) من

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \qquad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C).$$

الخطوة الأولى لـ (٢٦) نحصل عليها من

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2).$$

الخطوة التالية، بكتابة E^c بالنسبة إلى متممة E، فإن لدينا

$$S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) = S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c)$$
$$\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_1^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2);$$

ويتم الحصول على الصيغة الأخيرة من (٢٦) إذا لاحظنا إن

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c.$$

استناداً إلى (٢٣)، (١٩)،و(١٨)، فإن هذه الخواص لـ $S(A,B)$ تؤدي إلى أن

$$d(A,B) = d(B,A), \qquad d(A,A) = 0, \tag{٢٧}$$

$$d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B), \tag{٢٨}$$

$$\left.\begin{array}{l} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2) \tag{٢٩}$$

تبين العلاقتين (٢٧) و(٢٨) إن $d(A,B)$ تحقق متطلبات التعريف ٢،١٥، باستثناء إن $d(A,B) = 0$ لا تؤدي إلى أن $A = B$. على سبيل المثال، إذا كانت $\mu = m$، A قابلة للعد، و B خالية، فإن لدينا

$$d(A,B) = m^*(A) = 0;$$

لرؤية ذلك، قم بتغطية النقطة nth لـ A بالفترة I_n بحيث أن

$$m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon.$$

ولكن إذا عرفنا المجموعتين A وB بأنها متكافئتين، شريطة أن تكون

$$d(A,B) = 0$$

تقسم المجموعات الجزئية لـ R^p إلى صفوف متكافئة، و $d(A,B)$ تجعل مجموعة هذه الصفوف المتكافئة في الفضاء المتري. لذلك فإن $\mathscr{M}_F(\mu)$ ستصبح كمنطلق لـ E. إن هذا التعبير ليس مهماً بالنسبة للبرهان، ولكنه يفسر الفكرة الأساسية.

إننا نحتاج إلى خاصية واحدة إضافية إلى $d(A,B)$، وهي بالتحديد،

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le d(A,B), \tag{٣٠}$$

إذا كان على الأقل واحد من $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ منتهية. ولنفترض أن $0 \le \mu^*(B) \le \mu^*(A)$. فإن (٢٨) تبين أن

$$d(A,0) \le d(A,B) + d(B,0),$$

أي أن

$$\mu^*(A) \le d(A,B) + \mu^*(B).$$

بما أن $\mu^*(B)$ منتهية، فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \le d(A,B).$$

برهان المبرهنة ١١،١٠: نفترض أن $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$، $B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. نختار $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ بحيث أن $A_n \in \mathcal{E}$, $B_n \in \mathcal{E}$, $A_n \to A$, $B_n \to B$. عندها فإن (٢٩)، (٣٠) تبينان أن

$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \qquad (٣١)$$

$$A_n \cap B_n \to A \cap B, \qquad (٣٢)$$

$$A_n - B_n \to A - B, \qquad (٣٣)$$

$$\mu^*(A_n) \to \mu^*(A), \qquad (٣٤)$$

و $\mu^*(A) < +\infty$ نظراً لأن $d(A_n, A) \to 0$. استناداً إلى (٣١) و (٣٣)، فإن $\mathcal{M}_F(\mu)$ حلقة. استناداً إلى (٧)،

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

بترك $n \to \infty$، فإننا نحصل، استناداً إلى (٣٤) والمبرهنة ١١،٨ (أ)،

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

إذا كانت $A \cap B = 0$، فإن $\mu^*(A \cap B) = 0$.

يؤدي ذلك إلى أن μ^* تكون تجميعية في $\mathcal{M}_F(\mu)$.

الآن لتكن $A \in \mathcal{M}(\mu)$. عندها يمكن تمثيل A كاتحاد لمجموعة قابلة للعد من المجموعات المنفصلة *disjoints* لـ $\mathcal{M}_F(\mu)$. وذلك لأنه إذا كانت $A = \bigcup A'_n$ مع $A'_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$، اكتب $A_1 = A'_1$، و

$$A_n = (A'_1 \cup \cdots \cup A'_n) - (A'_1 \cup \cdots \cup A'_{n-1}) \qquad (n = 2,3,4,\ldots).$$

عندها فإن

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad (٣٥)$$

هو التمثيل المطلوب. استناداً إلى (١٩)

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \qquad (٣٦)$$

من جهة أخرى، $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$، واستناداً إلى تجميعية μ^* في $\mathcal{M}_F(\mu)$ فإننا نحصل على

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n). \quad (٣٧)$$

المعادلات (٣٦) و(٣٧) تؤدي إلى

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \quad (٣٨)$$

أفترض أن $\mu^*(A)$ منتهية. ضع $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. عندها فإن (٣٨) تبين أن

$$d(A, B_n) = \mu^*(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \to 0$$

عندما $n \to \infty$. إذن $B_n \to A$ ؛ ونظراً لأن $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$، فإنه من السهولة أن نلاحظ إن $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

بذلك نكون قد بينا إن $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ إذا كانت $A \in \mathcal{M}(\mu)$ و $\mu^*(A) < +\infty$.

من الواضح الآن أن μ^* قابلة للعد تجميعياً في $\mathcal{M}(\mu)$. وذلك لأنه إذا كانت

$$A = \bigcup A_n,$$

حيث أن $\{A_n\}$ هي متتالية للمجموعات المنفصلة لـ $\mathcal{M}(\mu)$، بينا إن (٣٨) تتحقق إذا كانت $\mu^*(A_n) < +\infty$ لكل n، وفي الحالة الأخرى تكون (٣٨) عديمة المعنى.

أخيراً، يجب علينا أن نبين أن $\mathcal{M}(\mu)$ تكون حلقة $-\sigma$. إذا كانت $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$، $n = 1,2,3,\ldots$، فأنه من الواضح $\bigcup A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ (المبرهنة ٢،١٢).

افترض أن $A \in \mathcal{M}(\mu)$، $B \in \mathcal{M}(\mu)$، و

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

حيث أن $A_n, B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. عندها فإن المتطابقة

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

تبين أن $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$ ؛ وبما أن

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < +\infty,$$

$A_n \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. إذن $A_n - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$، و $A - B \in \mathcal{M}(\mu)$ نظراً لأن

$$A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B).$$

نقوم الآن باستبدال $\mu^*(A)$ بـ $\mu(A)$ إذا كانت $A \in \mathcal{M}(\mu)$. لذلك فإن μ، التي عرفت بالأصل فقط في $\mathcal{E}$، تكون قد وسعت إلى دالة مجموعة قابلة للعد التجميعي في الحلقة –

σ $\mathscr{M}(\mu)$. يطلق على دالة المجموعة الموسعة هذه *"القياس"* "**measure**" ويطلق على الحالة الخاصة التي تكون فيها $\mathscr{M} = \mu$ *مقياس ليبك* ***Lebesgue measure*** في $\mathbf{R}^p$.

١١، ١١ ملاحظات:

(أ) إذا كانت A مفتوحة،فإن $A \in \mathscr{M}(\mu)$.وهو لكل مجموعة مفتوحة في $\mathbf{R}^p$ الاتحاد لمجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة. لرؤية ذلك، يكفي أن تكون أساساً قابلاً للعد الذي عناصره فترات مفتوحة.

بأخذ المتممات، يؤدي ذلك إلى أن كل مجموعة مغلقة تكون في $\mathscr{M}(\mu)$.

(ب) إذا كانت $A \in \mathscr{M}(\mu)$ و $\varepsilon > 0$، يوجد هنالك مجموعتين F و G بحيث أن

$$F \subset A \subset G,$$

F مغلقة، G مفتوحة، و

$$\mu(G - A) < \varepsilon, \quad \mu(A - F) < \varepsilon. \qquad (٣٩)$$

تتحقق المتباينة الأولى نظراً لأن μ^* كانت معرفة بواسطة الأغطية بمجموعات أولية مفتوحة ***open***. ومن ثم تستنتج المتباينة الثانية بأخذ المتممات.

(ج) نقول أن E ***مجموعة بوريل Borel set*** إذا كان بالإمكان الحصول على E بواسطة عدد قابل للعد من العمليات، ابتداءً من مجاميع مفتوحة، كل عملية تتألف من أخذ اتحادات، تقاطعات، أو متممات. الطائفة **collection** $\mathscr{B}$ لجميع مجموعات بوريل في $\mathbf{R}^p$ تكون حلقة $-\sigma$ ؛ وفي الواقع، فإنها أصغر حلقة $-\sigma$ تحتوي على جميع المجموعات المفتوحة. استناداً إلى الملاحظة (أ)، فإن $E \in \mathscr{M}(\mu)$ إذا كانت $E \in \mathscr{B}$.

(د) إذا كانت $A \in \mathcal{M}(\mu)$، يوجد هنالك مجموعتي بوريل F وG بحيث أن $F \subset A \subset G$، و

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0. \qquad (٤٠)$$

نحصل على ذلك من (ب) إذا أخذنا $\varepsilon = 1/n$ وتركنا $n \to \infty$.

بما أن $A = F \cup (A - F)$، فإننا نلاحظ أن كل $A \in \mathscr{M}(\mu)$ هي الاتحاد لمجموعة بوريل ومجموعة من القياس صفر.

إن مجاميع بوريل قابلة للقياس $-\mu$ لكل μ.ولكن مجموعات القياس صفر [أي أن المجموعات E التي تكون فيها $\mu^*(E) = 0$] قد تكون مختلفة بالنسبة لـــ μ المختلفة.

(هـــ) بالنسبة لكل μ، تشمل مجموعات القياس صفر حلقة $-\sigma$.

(و) في حالة مقياس ليبك، كل مجموعة قابلة للعد تمتلك قياس صفر. لكن يوجد هنالك مجموعات غير قابلة للعد (في الواقع،تام) من القياس صفر. بالإمكان أخذ مجموعة كانتور كمثال على ذلك: باستخدام الترميز المذكور في ٢،٤٤ ، من السهولة أن نلاحظ أن

$$m(E_n) = (\tfrac{2}{3})^n \qquad (n = 1,2,3,\ldots);$$

ونظراً لأن $P \subset E_n$, $P = \bigcap E_n$ لكل n لذلك فإن $m(P) = 0$.

فضاءآت القياس Measure Spaces

١١، ١٢ تعريف: لنفترض أن X مجموعة، ليس بالضروري أن تكون مجموعة جزئية للفضاء الإقليدي، أو في الواقع لأي فضاء متري. يقال لـــ X بأنها ***فضاء قياس*** ***measure space*** إذا كان يوجد هنالك حلقة $\sigma -$ $\mathscr{M}$ للمجموعات الجزئية لـــ X (والتي تسمى مجموعات قابلة للقياس measurable sets) ودالة مجموعة قابلة للعد التجميعي الغير سلبي μ (والتي تسمى مقياس measure)، معرفة في $\mathscr{M}$.

إذا كانت، إضافة لذلك، $X \in \mathscr{M}$ ، عندها يقال لـــ X بأنه فضاءاً ***قابلاً للقياس*** ***measurable space*** .

على سبيل المثال، نستطيع أن نأخذ $X = \mathbf{R}^p$ ، μ مجموعة جميع مجموعات لبيك الجزئية لـــ $\mathbf{R}^p$، و μ قياس ليبك.

أو، لتكن X مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة، $\mathscr{M}$ مجموعة جميع المجموعات الجزئية لـــ X، و $\mu(E)$ عدد عناصر E.

المثال الآخر تقدمه لنا نظرية الاحتمالات probaility theory ،حيث من الجائز أن تعتبر الأحداث events كمجموعات، و احتمالية وقوع الأحداث تكون مجموعة دالة تجميعية (أو قابلة للعد التجميعي).

في الفترات القادمة، سنتناول دائماً الفضاء آت القابلة للقياس. يجب أن نؤكد هنا نظرية إن نظرية التكامل التي سنناقشها حالاً سوف لن تكون اسهل وفق إي اعتبار إذا ما ضحينا بالعمومية التي توصلنا أليها لحد الآن وحددنا تعاملنا بمقياس ليبك، لنقل،في فترة للخط الحقيقي. وفي الواقع،فإن الخواص الرئيسية للنظرية تظهر بشكل اكثر وضوحاً بكثير بالنسبة للحالة

الأكثر عمومية، والتي يلاحظ فيها إن كل شيء يعتمد على قابلية العد التجميعي لـــ μ في الحلقة – σ.

سيكون من الملائم أن نقدم الرمز

$$\{x|P\} \tag{٤١}$$

بالنسبة إلى مجموعة جميع العناصر x التي تمتلك الخاصية P.

الدوال القابلة للقياس Measurable Functions

١١، ١٣ تعريف: لتكن f دالة معرفة في الفضاء القابل للقياس X، بقيم في منظومة الأعداد الصحيحة الموسعة. يقال للدالة f بأنها قابلة للقياس إذا كانت المجموعة

$$\{x|f(x)>a\} \tag{٤٢}$$

قابلة للقياس لكل a حقيقية.

١١، ١٤ مثال: إذا كانت $X=\mathbf{R}^p$ و $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mu)$ كما معرف في التعريف ٩، ١١، فإن كل دالة مستمرة f تكون قابلة للقياس، نظراً لأنه ستكون عندها (٤٢) مجموعة مفتوحة.

١١، ١٥ مبرهنة: *كلاً من الشروط الأربعة الآتية تؤدي إلى الشروط الثلاث الأخرى:*

تكون $\{x|\ f(x)>a\}$ قابلة للقياس لكل a حقيقية . (٤٣)

تكون $\{x|\ f(x)\geq a\}$ قابلة للقياس لكل a حقيقية . (٤٤)

تكون $\{x|\ f(x)<a\}$ قابلة للقياس لكل a حقيقية . (٤٥)

تكون $\{x|\ f(x)\leq a\}$ قابلة للقياس لكل a حقيقية . (٤٦)

البرهان تبين العلاقات

$$\{x\,|f(x)\geq a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\,\middle|f(x)>a-\frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x\,|f(x)<a\}=X-\{x\,|f(x)\geq a\},$$

$$\{x\,|f(x)\leq a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\,\middle|f(x)<a+\frac{1}{n}\right\},$$

$$\{x\,|f(x)>a\}=X-\{x\,|f(x)\leq a\}$$

على التوالي بأن (٤٣) تؤدي إلى (٤٤)، (٤٤) تؤدي إلى (٤٥)، (٤٥) تؤدي إلى (٤٦)، و (٤٦) تؤدي إلى (٤٣).

إذن يمكن استخدام أياً من هذه الشروط بدلاً من (٤٢) لتعريف القابلية على القياس.

١١، ١٦ مبرهنة: *إذا كانت f قابلة للقياس، فإن $|f|$ قابلة للقياس.*

البرهان:

$$\{x \,\|f(x)| < a\} = \{x \,|f(x) < a\} \cap \{x \,|f(x) > -a\}.$$

١١، ١٧ مبرهنة: *لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس. بالنسبة إلى $x \in X$، ضع*

$$g(x) = \sup f_n(x) \qquad (n = 1,2,3,\dots),$$
$$h(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

عندها فإن g و h هما قابلتان للقياس.

وبالطبع فإن نفس الشيء يصح على الـ $\inf$ و الـ $\liminf$.

البرهان:

$$\{x|g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x) > a\},$$
$$h(x) = \inf g_m(x),$$

حيث أن $g_m(x) = \sup f_n(x) \qquad (n \geq m)$.

نتائـــج:

(أ) *إذا كانت f و g قابلتان للقياس، فإن $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ قابلتين للقياس.*

إذا كانت

$$f^+ = \max(f,0), \quad f^- = -\min(f,0), \tag{٤٧}$$

فإن ذلك يؤدي، بشكل خاص، إلى أن f^+ و f^- قابلتين للعد.

(ب) تكون غاية المتتالية المتقاربة للدوال القابلة للقياس، قابلة للقياس.

١١، ١٨ مبرهنة: *لتكن f و g دالتين للقيم – الحقيقية قابلتين للقياس معرفتين في X، لتكن F حقيقية ومستمرة في R^2، وضع*

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \qquad (x \in X).$$

عندها فإن h قابلة للقياس.

بصورة خاصة، $f + g$ و fg قابلتين للقياس.

البرهان: لتكن

$$G_a = \{(u,v) \mid F(u,v) > a\}.$$

عندها فإن G_a مجموعة جزئية مفتوحة لـــ $\mathbf{R}^2$، ونستطيع كتابة

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n ,$$

حيث أن $\{I_n\}$ هي متتالية لفترات مفتوحة:

$$I_n = \{(u,v) \mid a_n < u < b_n, c_n < v < d_n\}.$$

بما أن

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

قابلة للقياس، فإن ذلك يؤدي إلى أن المجموعة

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

قابلاً للقياس. إذن نفس الشيء يصح على

$$\{x \mid h(x) > a\} = \{x \mid (f(x), g(x)) \in G_a\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\}.$$

خلاصة القول، قد نستطيع القول أن جميع عمليات التحليل الاعتيادية، بضمنها عمليات الغاية، عندما تطبق على الدوال القابلة للقياس، فإنها تؤدي إلى دوال قابلة للقياس ؛ بعبارة أخرى،

إن كون هذه العبارة مجرد عبارة تقريبية تتضح لنا في المثال الآتي (الذي هو مبني على أساس مقياس ليبك، على الخط الحقيقي): إذا كانت $h(x) = f(g(x))$، حيث أن f قابلة للقياس و g مستمرة، عندها فليس بالضرورة أن تكون h مستمرة (لزيادة المعلومات، راجع مكشين McShane، صحيفة ٢٤١).

ربما يكون القارئ قد لاحظ بأننا لم نذكر القياس بنقاشنا حول الدوال القابلة للقياس. وفي

الواقع، فإن صنف الدوال القابلة للقياس في X يعتمد فقط على الحلقة σ - $\mathcal{M}$ (باستخدام ترميز التعريف ١١، ١٢). على سبيل المثال، قد نستطيع التحدث عن *دوال بوريل - القابلة للقياس في* R^p *Borel-measurable functions on*، أي عن، الدوال f التي تكون فيها

$$\{x \,|f(x) > a\}$$

مجموعة بوريل دائماً، بدون الإشارة إلى أي مقياس معين.

الدوال البسيطة Simple Functions

١١، ١٩ تعريف: لتكن s دالة قيم حقيقية معرفة في X. إذا كان مدى s منتهية **finite**، فإننا نقول أن s *دالة بسيطة simple function*.

لتكن $E \subset X$، وضع

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases} \qquad (٤٨)$$

تسمى K_E *الدالة المميزة لـ E characteristic function of E*.

افترض أن مدى s يتألف من الأعداد المختلفة $c_1,\ldots,c_n$. لتكن

$$E_i = \{x \,|s(x) = c_i\} \quad (i = 1,\ldots,n).$$

عندها فإن

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}, \qquad (٤٩)$$

أي أن، كل دالة بسيطة هي اتحاد خطي منتهي لدوال مميزة. من الواضح أن s قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت المجموعات $E_1,\ldots E_n$ قابلة للقياس.

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن تقريب أي دالة بالدوال البسيطة:

١١، ٢٠ مبرهنة: *لتكن f دالة حقيقية في X. يوجد هنالك متتالية $\{s_n\}$ من الدوال البسيطة بحيث أن $s_n(x) \to f(x)$ عندما $n \to \infty$، لكل $x \in X$. إذا كانت f قابلة للقياس، فإنه من الجائز أن نختار $\{s_n\}$ لتكون متتالية من الدوال القابلة للقياس. إذا كانت $f \geq 0$، فإنه من الممكن أن نختار $\{s_n\}$ لتكون متتالية متزايدة ترتيبياً.*

البرهان: إذا كانت $f \geq 0$، عرف

$$E_{ni} = \left\{ x \left| \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right. \right\}, \quad F_n = \left\{ x \left| f(x) \geq n \right. \right\}$$

بالنسبة إلى $n = 1,2,3,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,n2^n$. ضع

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + nK_{F_n}. \qquad (٥٠)$$

في الحالة العامة، لتكن $f = f^+ - f^-$، وطبق التشكيل السابق لـــ f^+ و لــ f^-.

ربما تجدر الإشارة إلى أن المتتالية $\{s_n\}$ المقدمة في (٥٠) تتقارب بانتظام إلى f إذا كانت f مقيدة.

التكامل Integration

سوف نقوم بتعريف التكامل في الفضاء القابل للقياس X، الذي تكون فيه $\mathcal{M}$ حلقة $-\sigma$ مجموعات قابلة للقياس، μ هي المقياس. قد يفكر القارئ الذي يرغب بتكوين صورة أكثر صلابة للموضوع بـــ X كأنها الخط الحقيقي، أو فترة، و بـــ μ كأنه مقياس ليبك m.

١١، ٢١ تعريف: أفترض أن

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \quad (x \in X, c_i > 0) \qquad (٥١)$$

قابلة للقياس، وأفترض أن $E \in \mathcal{M}$.نقوم بتعريف

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i). \qquad (٥٢)$$

إذا كانت f قابلة للقياس وغير سالبة، نقوم بتعريف

$$\int_E f d\mu = \sup I_E(s), \qquad (٥٣)$$

حيث الـــ sup مأخوذة فوق جميع الدوال البسيطة القابلة للقياس s بحيث أن $0 \leq s \leq f$.

يسمى العنصر الأيسر من (٥٣) ***متكامل لبيك*** لـــ f ***Lebesgue integral of f***، بالاستناد إلى القياس μ، فوق المجموعة E. تجدر الملاحظة إلى أن المتكامل قد يمتلك القيمة $+\infty$.

من السهولة أن نثبت أن

$$\int_E s \, d\mu = I_E(s) \qquad (٥٤)$$

لكل دالة بسيطة غير سالبة قابلة للقياس s.

١١، ٢٢ تعريف: لتكن f قابلة للقياس، ولاحظ المتكاملين

$$\int_E f^+ d\mu \quad , \quad \int_E f^- d\mu, \tag{٥٥}$$

حيث أن f^+ و f^- معرفتين كما في (٤٧).

إذا كان على الأقل واحد من المتكاملين (٥٥) منتهى، فإننا نعرف

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu. \tag{٥٦}$$

إذا كان كلا المتكاملين في (٥٥) منتهيين، فإن (٥٦) تكون منتهية، ونقول أن f ***قابلة للتكامل*** (***أو قابلة للتجميع***) في ***(or summable) integrable on E*** بمفهوم ليبك، بالاستناد إلى μ ؛ نكتب $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E. إذا كانت $\mu = m$، فإن الرمز المألوف هو: $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E.

ربما يكون هذا المصطلح مربكاً بعض الشيء: إذا كانت (٥٦) $+\infty$ أو $-\infty$، فإن متكامل f فوق E يكون معرفاً، على الرغم من أن f ليست قابلة للتكامل بالمفهوم أعلاه ؛ إن f قابلة للتكامل في E فقط إذا كان متكاملها فوق E منتهياً.

سوف نصب اهتمامنا بشكل رئيسي على الدوال القابلة للتكامل، على الرغم من أنه قد يكون من المفيد تناول الحالة الأكثر عمومية في بعض الحالات.

١١، ٢٣ ملاحظات: من الواضح أن الخصائص الآتية تتحقق:

(أ) إذا كانت f قابلة للقياس ومقيدة في E، وإذا كانت $\mu(E) < +\infty$، فإن $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E.

(ب) إذا كانت $a \le f(x) \le b$ بالنسبة إلى $x \in E$، و $\mu(E) < +\infty$، فإن

$$a\mu(E) \le \int_E f\, d\mu \le b\mu(E).$$

(ج) إذا كانت $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$، في E، وإذا كانت $f(x) \le g(x)$ بالنسبة إلى $x \in E$، فإن

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

(د) إذا كانت $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E، فإن $cf \in \mathcal{L}(\mu)$ في E، لكل ثابت c منتهي، و

$$\int_E cf\, d\mu = c\int_E f\, d\mu.$$

(هـ) إذا كانت $\mu(E) = 0$، و f قابلة للقياس، فإن

$$\int_E f\, d\mu = 0.$$

(و) إذا كانت $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E، $A \in \mathcal{M}$، و $A \subset E$، فإن $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في A.

١١، ٢٤ مبرهنة:

(أ) لنفترض أن f قابلة للقياس وغير سالبة في X. بالنسبة إلى $A \in \mathcal{M}$، عرف

$$\phi(A) = \int_A f\, d\mu. \qquad (٥٧)$$

عندها فإن ϕ قابلة للعد التجميعي في $\mathcal{M}$.

(ب) يتحقق نفس الاستنتاج إذا كانت $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في X.

البرهان: من الواضح أن (ب) تستنتج من (أ) إذا كتبنا $f = f^+ - f^-$ و طبقنا (أ) على f^+ وعلى f^-.

لبرهنة (أ)، علينا أن نبين

$$\phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n) \qquad (٥٨)$$

إذا كانت $A_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$, $A_i \cap A_j = 0$, بالنسبة إلى $i \neq j$، و $A = \bigcup_1^{\infty} A_n$.

إذا كانت f دالة مميزة، فإن القابلية على العد التجميعي لـ ϕ هو نفس القابلية على العد التجميعي لـ μ بالضبط، ونظراً لأن

$$\int_A K_E d\mu = \mu(A \cap E).$$

إذا كانت f بسيطة، فإن f تكون على شكل (٥١)، ومرة ثانية يتحقق الاستنتاج.

في الحالة العامة، لدينا، لكل دالة بسيطة قابلة للقياس s بحيث أن $0 \leq s \leq f$،

$$\int_A s\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s\, d\mu \leq \sum_{n-1}^{\infty} \phi(A_n).$$

لذلك، استناداً إلى (٥٣)، فإن

$$\phi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \qquad (٥٩)$$

الآن إذا كانت $\phi(A_n) = +\infty$ لبعض n، فإن (٥٨) عديمة المعنى، نظراً لأن $\phi(A) \geq \phi(A_n)$. أفترض أن $\phi(A_n) < +\infty$ لكل n.

لنأخذ $\varepsilon > 0$، نستطيع أن نختار دالة قابلة للقياس s بحيث أن $0 \leq s \leq f$، وبحيث أن

$$\int_{A_1} s\,d\mu \geq \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s\,d\mu \geq \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon. \tag{٦٠}$$

إذن

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \geq \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\varepsilon,$$

لذلك فإن

$$\phi(A_1 \cup A_2) \neq\geq \phi(A_1) + \phi(A_2).$$

يؤدي ذلك إلى إن لدينا، لكل n،

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n). \tag{٦١}$$

بما أن $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$، (٦١) تؤدي إلى أن

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n), \tag{٦٢}$$

ونستنتج (٥٨) من (٥٩) و (٦٢).

نتيجة: *إذا كانت* $A \in \mathcal{M}$، $B \subset A$، و $\mu(A - B) = 0$، *فإن*

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu.$$

بما أن $A = B \cup (A - B)$، فإن ذلك يستنتج من الملاحظة ١١، ٢٣ (هـ).

١١، ٢٥ ملاحظات: تبين النتيجة السابقة أن مجموعات المقياس صفر تهمل في التكامل.

لنكتب $f \sim g$ في E إذا كانت المجموعة

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

تمتلك المقياس صفر.

عندها فإن $f \sim f$ ؛ $f \sim g$ تؤدي إلى أن $g \sim f$ ؛ و $f \sim g$, $g \sim h$ تؤدي إلى أن. $f \sim h$.

أي أن، العلاقة $\sim$ هي علاقة تكافؤ.

إذا كانت $f \sim g$ في E، فمن الواضح أن لدينا

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu,$$

شريطة وجود المتكاملين، لكل مجموعة جزئية قابلة للقياس A لـ E.

إذا كانت الخاصية P تتحقق لكل $x \in E - A$، وإذا كانت $\mu(A) = 0$، فمن المألوف القول أن P تتحقق بالنسبة إلى تقريباً جميع $x \in E$، أو إن P تتحقق في كل مكان تقريباً في E.

(بالطبع فإن مفهوم " في كل مكان تقريباً " يعتمد على المقياس المعين تحت الملاحظة. ما لم يرد ما يشير إلى خلاف ذلك، فإنما سوف تشير إلى مقياس ليبك في كتاباتنا هذه).

إذا كانت $f \in \mathscr{L}(\mu)$ في E، فمن الواضح إن $f(x)$ يجب إن تكون منتهية في كل مكان تقريباً من E. لذلك فإننا معظم الحالات لا نفقد أي عمومية إذا افترضنا إن الدوال المعنية منتهية – القيمة من البداية.

١١، ٢٦ مبرهنة: *إذا كانت* $f \in \mathscr{L}(\mu)$ *في* E*، فإن* $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$ *في* E*،و*

$$\left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d\mu \ . \qquad (٦٣)$$

البرهان: اكتب $E = A \cup B$، حيث $f(x) \ge 0$ في A و $f(x) < 0$ في B.

استناداً إلى المبرهنة ١١، ٢٤،

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty ,$$

لذلك فإن $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$. بما أن $f \le |f|$ و $-f \le |f|$، فإننا نلاحظ

$$\int_E f d\mu \le \int_E |f| d\mu, \qquad -\int_E f d\mu \le \int |f| d\mu ,$$

ويؤدي ذلك إلى (٦٣).

بما أن قابلية f على التكامل تؤدي إلى قابلية $|f|$ على التكامل، فغالباً ما يطلق على متكامل ليبك المتكامل المتقارب بشكل مطلق. بالطبع يمكن تعريف المتكاملات المتقاربة بشكل غير مطلق، وفي معالجة بعض المشاكل يصبح ذلك أمراً ضرورياً. ولكن هذه المتكاملات تفتقد إلى بعض اكثر الخواص فائدة لمتكامل ليبك وتلعب دوراً أقل أهمية نوعاً ما في التحليل.

١١، ٢٧ مبرهنة: *لنفترض أن* f قابلة للقياس في E، $|f| \le g$، و $g \in \mathscr{L}(\mu)$ في E.

عندها فإن $f \in \mathscr{L}(\mu)$ في E.

البرهان: لدينا $f^+ \le g$ و $f^- \le g$.

١١، ٢٨ مبرهنة ليبك للتقارب المتماثل

Lebesgue's monotone convergence theorem

لنفترض أن $E \in \mathscr{M}$. ولتكن $\{f_n\}$ متتالية الدوال القابلة للقياس بحيث أن

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \qquad (x \in E). \qquad (٦٤)$$

لتكن f معرفة بـــ

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (x \in E) \tag{٦٥}$$

عندما $n \to \infty$. عندها فإن

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu \quad (n \to \infty) \;. \tag{٦٦}$$

البرهان: استناداً إلى (٦٤) من الواضح أن، عندما $n \to \infty$،

$$\int_E f_n d\mu \to \alpha \tag{٦٧}$$

بالنسبة لبعض α؛وبما أن $\int f_n \le \int f$، فإن لدينا

$$\alpha \le \int_E f d\mu \,. \tag{٦٨}$$

نختار c بحيث أن $0 < c < 1$، ولتكن s دالة بسيطة قابلة للقياس بحيث أن $0 \le s \le f$.

ضع

$$E_n = \{x \mid f_n(x) \ge cs(x)\} \qquad (n = 1,2,3,\dots) \,.$$

استناداً إلى (٦٤)، $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots;$ ؛و استناداً إلى (٦٥)،

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;. \tag{٦٩}$$

لكل n،

$$\int_E f_n d\mu \ge \int_{E_n} f_n d\mu \ge c\int_{E_n} s d\mu \tag{٧٠}$$

نترك $n \to \infty$ في (٧٠). بما أن المتكامل هو دالة مجموعة قابلة للعد التجميعي (المبرهنة ١١، ٢٤)، فأن (٦٩) تبين بأننا قد نطبق المبرهنة ١١، ٣ على المتكامل الأخير في (٧٠)، ونحصل على

$$\alpha \ge c\int_E s d\mu \,. \tag{٧١}$$

بترك $c \to 1$، فإننا نلاحظ أن

$$\alpha \ge \int_E s d\mu,$$

و(٥٣) تؤدي إلى

$$\alpha \ge \int_E f d\mu \tag{٧٢}$$

نستنتج المبرهنة من (٦٧)، (٦٨)، و(٧٢).

١١، ٢٩ مبرهنة: لنفترض أن $f = f_1 + f_2$ ، حيث أن $f_i \in \mathcal{L}(\mu)$ في E $(i = 1,2)$.
عندها فإن $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E، و

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu \qquad (٧٣)$$

البرهان: أولاً، لنفترض أن $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$. إذا كانت f_1 و f_2 بسيطتين، فإن (٧٣) تستنتج بشكل عديم القيمة من (٥٢) و (٥٤). خلافاً لذلك، نقوم باختيار متتاليتين متزايدتين ترتيبياً $\{s_n'\},\{s_n''\}$ من الدوال البسيطة القابلة للقياس الغير سالبة والتي تتقارب إلى f_1 و f_2.
تبين المبرهنة ١١، ٢٠ أن ذلك ممكناً. ضع $s_n = s_n' + s_n''$. عندها فإن

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s_n' d\mu + \int_E s_n'' d\mu ,$$

وتستنتج (٧٣) إذا تركنا $n \to \infty$ واستخدمنا المبرهنة ١١، ٢٨.

الخطوة التالية، نفترض أن $f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$. ضع

$$A = \{x | f(x) \geq 0\}, \qquad B = \{x | f(x) < 0\} .$$

عندها فأن f، f_1، و $-f_2$ غير سالبة في A. إذن

$$\int_A f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A f_2 d\mu . \qquad (٧٤)$$

وبنفس الطريقة، $-f$، f_1، و $-f_2$ غير سالبة في B، لذلك فإن

$$\int_B (-f_2) d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B (-f) d\mu ,$$

أو

$$\int_B f_1 d\mu = \int_B f\, d\mu - \int_B f_2 d\mu , \qquad (٧٥)$$

وتستنتج (٧٣) إذا جمعنا (٧٤) و(٧٥).

في الحالة العامة، بالإمكان تقسيم E إلى أربعة مجموعات E_i في كل واحدة منها $f_1(x)$ و $f_2(x)$ بإشارة ثابتة. تؤدي الحالتان اللتان برهنتهما لحد الآن إلى

$$\int_{E_i} f d\mu = \int_{E_i} f_1 d\mu + \int_{E_i} f_2 d\mu \qquad (\mathrm{i} = 1,2,3,4) ,$$

وتستنتج (٧٣) بجمع هذه المعادلات الأربعة.

نحن الآن في موضع يسمح لنا بإعادة صياغة المبرهنة ١١، ٢٨ بالنسبة إلى المتسلسلات.

١١، ٣٠ مبرهنة: لنفترض أن $E \in \mathcal{M}$. إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة

للقياس الغير سالبة و

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x\in E), \tag{٧٦}$$

فإن

$$\int_E f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n d\mu .$$

البرهان: تشكل المجموعات الجزئية لـــ (٧٦) متتالية متزايدة ترتيبا.

١١، ٣١ مبرهنة فاتيو Fatou's theorem : لنفترض أن $E\in \mathcal{M}$. إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية الدوال القابلة للقياس الغير سالبة و

$$f(x)=\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x\in E),$$

فإن

$$\int_E f d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu \tag{٧٧}$$

قد يتحقق التباين الضيق في (٧٧). مقدم مثال على ذلك في التمرين ٥.

البرهان: بالنسبة إلى $n=1,2,3,\ldots$ و $x\in E$، ضع

$$g_n(x)=\inf f_i(x) \qquad (i\ge n).$$

عندها فإن g_n قابلة للقياس في E، و

$$0\le g_1(x)\le g_2(x)\le\cdots, \tag{٧٨}$$

$$g_n(x)\le f_n(x), \tag{٧٩}$$

$$g_n(x)\to f(x) \qquad (n\to\infty). \tag{٨٠}$$

استناداً إلى (٧٨)، (٨٠)، والمبرهنة ١١، ٢٨،

$$\int_E g_n\, d\mu \to \int_E f\, d\mu, \tag{٨١}$$

لذلك فإن (٧٧) تستنتج من (٧٩) و (٨١).

١١، ٣٢ مبرهنة لبيك للتقارب المهيمن

Lebesgue's dominated convergence theorem

لنفترض أن $E\in \mathcal{M}$. لتكن $\{f_n\}$ متتالية الدوال القابلة للقياس بحيث أن

$$f_n(x)\to f(x) \qquad (x\in E) \tag{٨٢}$$

عندما $n \to \infty$*. إذا كان يوجد هنالك دالة* $g \in \mathcal{L}(\mu)$ *في* E*، بحيث أن*

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad (n = 1,2,3,\ldots, x \in E) \tag{٨٣}$$

عندها فإن

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu. \tag{٨٤}$$

بسبب (٨٣)، يقال بأن $\{f_n\}$ مهيمن عليها بـ g، ونتكلم عن التقارب المهيمن. استناداً إلى الملاحظة ١١، ٢٥ ، فإن الاستنتاج هو نفسه إذا كانت (٨٢) تتحقق في كل مكان تقريباً في E.

البرهان: أولاً، تؤدي (٨٣) والمبرهنة ١١، ٢٧ إلى أن $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ و $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E.

بما أن $f_n + g \ge 0$ ، فإن لمبرهنة فاتو **Fatou's theorem** ، تبين أن

$$\int_E (f+g)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g)\, d\mu,$$

أو

$$\int_E f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu. \tag{٨٥}$$

بما أن $g - f_n \ge 0$ ، فإننا نلاحظ بنفس الطريقة أن

$$\int_E (g-f)\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n)\, d\mu,$$

لذلك فإن

$$-\int_E f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \left[-\int_E f_n d\mu\right],$$

والتي هي نفس أن

$$\int_E f d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_E f d\mu \ . \tag{٨٦}$$

يستنتج الآن وجود الغاية في (٨٤) والمساواة المذكورة في (٨٤) من (٨٥) و(٨٦).

نتيجة: *إذا كانت* $\mu(E) < +\infty$. $\{f_n\}$ مقيدة بانتظام في E، $f_n(x) \to f(x)$ في E، فإن (٨٤) تتحقق.

ويقال للمتتالية المتقاربة المحددة بانتظام بأنها متقاربة بتحديد.

المقارنة مع مكامل ريمان

Comparison With The Riemann Integral

ستبين مبرهنتنا القادمة أن كل دالة قابلة للتكامل الريماني في فترة معينة تكون قابلة لتكامل ليبك أيضاً، وأن الدوال القابلة للتكامل الريماني تكون خاضعة لشروط استمرارية أكثر أحكاماً نوعاً ما. ولذلك وبعيداً عن كون نظرية ليبك تمكننا من تكامل طبقة أكبر كثيراً من الدوال، فإن فائدتها الرئيسية ربما تكمن في السهولة التي تتناول فيها العديد من عمليات الغاية ؛ ومن وجهة النظر هذه، ربما تعتبر مبرهنات ليبك للتقارب بالفصل الأساس لنظرية ليبك.

إن أحد المشاكل التي جابهتنا في نظرية ريمان هي أن غايات الدوال القابلة للتكامل الريماني (أو حتى الدوال المستمرة) قد تخفق في أن تكون قابلة للتكامل الريماني. تم تجاوز هذه المشكلة تقريباً،نظراً لآن غايات الدوال القابلة للقياس تكون دائماً قابلة للقياس.

ليكن فضاء القياسX هو الفترة $[a,b]$ للخط الحقيقي، بـــ $\mu = m$ (مقياس لبيك)، و $\mathcal{M}$ عائلة مجموعات – لبيك القابلة للقياس لـــ $[a,b]$. عوض عن

$$\int_X f dm$$

جرت العادة استخدام الرمز المألوف

$$\int_a^b f dx$$

بالنسبة إلى المتكامل لبيك لـــ f فوق $[a,b]$. لتميز متكاملات ريمان عن متكاملات لبيك، سوف نرمز إلى الأول بـــ

$$\Re\int_a^b f dx \,.$$

١١، ٣٣ مبرهنة:

(أ) *إذا كانت* $f \in \Re$ *في* $[a,b]$، *فإن* $f \in \mathcal{L}$ *في* $[a,b]$،و

$$\int_a^b f dx = \Re\int_a^b f dx \,. \qquad (٨٧)$$

(ب) *لنفترض أن f مقيدة في* $[a,b]$. *عندها فإن* $f \in \Re$ *في* $[a,b]$ *إذا وإذا فقط كانت* f *مستمرة في كل مكان تقريباً في* $[a,b]$.

البرهان: أفترض أن f مقيدة. استناداً إلى التعريف ٦، ١ و المبرهنة ٦، ٤ ، يوجد هنالك

متتالية $\{P_k\}$ من تجزئات $[a,b]$،بحيث أن P_{k+1} هي التجزئة لـ P_k، بحيث أن المسافة بين النقاط المتجاورة لـ P_k أقل من $1/k$، وبحيث أن

$$\lim_{k\to\infty} L(P_k,f) = \Re\underline{\int} fdx, \qquad \lim_{k\to\infty} U(P_k,f) = \Re\overline{\int} fdx . \tag{٨٨}$$

(جميع المتكاملات في هذا البرهان،مأخوذة فوق $[a,b]$).

إذا كانت $P_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$،بـ $x_n = b, x_0 = a$، عرف

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a) \;;$$

ضع $U_k(x) = M_i$ و $L_k(x) = m_i$ بالنسبة إلى $x_{i-1} < x \le x_i$ ، $1 \le i \le n,$ باستخدام الرمز المقدم في التعريف ١،٦.فإن

$$L(P_k,f) = \int L_k dx, \qquad U(P_k,f) = \int U_k dx \;, \tag{٨٩}$$

و

$$L_1(x) \le L_2(x) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le U_2(x) \le U_1(x) \tag{٩٠}$$

بالنسبة إلى جميع $x \in [a,b]$، نظراً لأن P_{k+1} تصفي P_k. استناداً إلى (٩٠)، يوجد هنالك

$$L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x), \qquad \mathrm{U}(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x). \tag{٩١}$$

لاحظ بأن L و U دالتين مقيدتين قابلتين للقياس في $[a,b]$، وأن

$$L(x) \le f(x) \le U(x) \qquad (a \le x \le b), \tag{٩٢}$$

وأن

$$\int Ldx = \Re\underline{\int} fdx, \qquad \int Udx = \Re\overline{\int} fdx, \tag{٩٣}$$

استناداً إلى (٨٨)،(٩٠)، ولمبرهنة التقارب المرتب.

لغاية الآن، لم يفترض أي شيء بخصوص f باستثناء كونها دالة حقيقية محددة في $[a,b]$.

لتكملة البرهان، لاحظ بأن $f \in \Re$ إذا وإذا فقط كان متكاملاتها الريمانيين العلوي والسفلي متساويان، إذا وإذا فقط كان

$$\int L\, dx = \int U\, dx; \tag{٩٤}$$

بما أن $L \le U$ ، فإن (٩٤) تحدث إذا وإذا فقط كان $L(x) = U(x)$ بالنسبة إلى جميع

$x \in [a,b]$ تقريباً (التمرين ١).

في تلك الحالة، تؤدي (٩٢) إلى أن

$$L(x) = f(x) = U(x) \tag{٩٥}$$

في كل مكان تقريباً من $[a,b]$، لذلك فإن f قابلة للقياس، ونستنتج (٨٧) من (٩٣) و(٩٥).

إضافة لذلك، إذا كانت x لا تنتمي إلى أي P_k، فإنه من السهولة جداً أن نلاحظ أن $L(x) = U(x)$ إذا وإذا فقط كانت f مستمرة في x. بما أن اتحاد المجموعات P_k قابلاً للعد، فإن مقياسها هو 0، ونستنتج بذلك أن f مستمرة في كل مكان تقريباً في $[a,b]$ إذا وإذا فقط كانت $L(x) = U(x)$ في كل مكان تقريباً، إذن (كما لاحظنا أعلاه) إذا وإذا فقط كانت $f \in \Re$.

وهذا ينهي البرهان.

إن الترابط المعروف بين التكامل والتفاضل يحمل نفس مدلولاته تقريباً في نظرية لبيك. إذا كانت $f \in \mathcal{L}$ في $[a,b]$، و

$$F(x) = \int_a^x f\,dt \qquad (a \le x \le b), \tag{٩٦}$$

عندها فإن $F'(x) = f(x)$ في كل مكان تقريباً من $[a,b]$.

وبالعكس، إذا كانت F قابلة للتفاضل عند كل نقطة من $[a,b]$ (إن عبارة "في كل مكان تقريباً" "almost everywhere" ليست كافية هنا!) وإذا كانت $F' \in \mathcal{L}$ في $[a,b]$، فإن

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) \qquad (a \le x \le b).$$

بالنسبة إلى برهان هاتين المبرهنتين، نقترح على القارئ الرجوع إلى أي من الكتب المتعلقة بالتكامل المذكورة في سجل المراجع Bibliography.

تكامل الدوال المركبة Integration of Complex Functions

لنفترض أن f دالة القيم – المركبة المعرفة في فضاء القياس X، وإن $f = u + iv$، حيث أن u و v حقيقتين. نقول أن f قابلة للقياس إذا وإذا فقط كان كلاً من u و v قابلاً للقياس.

من السهولة إثبات أن مجموعات و حاصل ضرب الدوال المركبة القابلة للقياس تكون

أيضاً قابلة للقياس. بما أن

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2},$$

فإن المبرهنة ١١، ١٨ تبين أن $|f|$ قابلة للقياس لكل دالة مركبة قابلة للقياس f.

لنفترض أن μ مقياساً في X، E مجموعة جزئية قابلة للقياس لـ X، و f دالة مركبة في X. نقول أن $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E شريطة أن تكون f قابلة للقياس و

$$\int_E |f| d\mu < +\infty \,, \tag{٩٧}$$

ونعرف

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu$$

إذا كانت (٩٧) تحقق. بما أن $|u| \le |f|$، $|v| \le |f|$، و $|f| \le |u| + |v|$، فمن الواضح أن (٩٧) تتحقق إذا وإذا فقط كانت $u \in \mathcal{L}(\mu)$ و $v \in \mathcal{L}(\mu)$ في E.

بالإمكان الآن توسيع المبرهنات ١١،٢٣ (أ)، (ء)، (هـ)، (و)، ١١،٢٤ (ب)، ١١،٢٦، ١١،٢٧، ١١،٢٩ ، و ١١،٣٢ إلى متكاملات ليبك للدوال المركبة. إن براهين ذلك سهلة جداً باستثناء برهان المبرهنة ١١،٢٦ الذي يحمل نوعاً من الأهمية:

إذا كانت $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E، يوجد هنالك عدداً مركباً c، $|c| = 1$، بحيث أن

$$c\int_E f d\mu \ge 0 \,.$$

ضع $g = cf = u + iv$، u و v حقيقيتين. عندها فإن

$$\left|\int_E f d\mu\right| = c\int_E f d\mu = \int_E g d\mu = \int_E u d\mu \le \int |f| d\mu \,.$$

تتحقق المساواة الثالثة أعلاه نظراً لأن المساواة التي تسبقها تبين أن $\int g d\mu$ حقيقية.

الدوال من الصنف $\mathcal{L}^2$ Functions Of Class

كتطبيق لنظرية ليبك، سنقوم الآن بتوسيع مبرهنة بارسيفال (التي برهنت بالنسبة إلى الدوال القابلة للتكامل الريماني فقط في الفصل الثامن) ونبرهن مبرهنة ريس – فيشر **Riesz-Fischer theorem** لمجموعات الدوال المتعامدة.

١١، ٣٤ تعريف: لتكن X فضاءاً قابلاً للقياس. نقول أن الدالة المركبة $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ في X إذا كانت f قابلة للقياس وإذا كانت

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty .$$

إذا كانت μ مقياس نبيك،فإننا نقول أن $f \in \mathcal{L}^2$. بالنسبة إلى $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (سوف نحذف عبارة " في X " من الآن فصاعداً) نعرف

$$\|f\| = \left\{\int_X |f|^2 d\mu\right\}^{1/2}$$

ونسمي $\|f\|$ المعيار $\mathcal{L}^2(\mu)$ لـ f.

١١، ٣٥ مبرهنة: لنفترض أن $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$.عندها فإن $fg \in \mathcal{L}(\mu)$، و

$$\int_X |fg| d\mu \le \|f\|\|g\| . \qquad (٩٨)$$

هذه هي متباينة شوارز، التي تناولناها سابقاً بالنسبة إلى المتسلسلات وإلى المتكاملات الريمانية. تؤدي المتباينة إلى أن

$$0 \le \int_X \left(|f| + \lambda|g|\right)^2 d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda\int_X |fg| d\mu + \lambda^2\|g\|^2 ,$$

التي تتحقق لكل λ حقيقية.

١١، ٣٦ مبرهنة: إذا كانت $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$، فإن $f + g \in \mathcal{L}^2(\mu)$، و

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\| .$$

البرهان: تبين متباينة شوارز أن

$$\begin{aligned}
\|f + g\|^2 &= \int |f|^2 + \int f\bar{g} + \int \bar{f} g + \int |g|^2 \\
&\le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\
&= \left(\|f\| + \|g\|\right)^2 .
\end{aligned}$$

١١، ٣٧ ملاحظة: إذا ما عرفنا المسافة بين الدالتين f و g في $\mathcal{L}^2(\mu)$ بأنها $\|f - g\|$، فإننا نلاحظ أن شروط التعريف ٢،١٥ تكون متحققة باستثناء كون أن $\|f - g\| = 0$ لا تؤدي إلى أن $f(x) = g(x)$ لجميع x ولكن فقط بالنسبة لجميع x تقريباً. لذلك،إذا حددنا الدوال التي تختلف فقط في مجموعة المقياس صفر، فإن $\mathcal{L}^2(\mu)$ فضاءاً مترياً.

نلاحظ الآن $\mathcal{L}^2$ في فترة ما من الخط الحقيقي، بالاستناد إلى مقياس ليبك.

١١، ٣٨ مبرهنة: *تشكل الدوال المستمرة مجموعة جزئية كثيفة لـ* $\mathcal{L}^2$ *في* $[a,b]$.

بصورة أكثر وضوحاً، إن ذلك يعني أنه بالنسبة لأي $f \in \mathcal{L}^2$ في $[a,b]$، وأي $\varepsilon > 0$، توجد الدالة g، المستمرة في $[a,b]$، بحيث أن

$$\|f-g\| = \left\{\int_a^b (f-g)^2\,dx\right\}^{1/2} < \varepsilon .$$

البرهان: سوف نقول أن f مقربة في $\mathcal{L}^2$ بالمتتالية $\{g_n\}$ إذا كانت $\|f-g_n\| \to 0$ عندما $n \to \infty$.

لتكن A مجموعة جزئية مغلقة لـ$[a,b]$، و K_A هي الدالة المميزة **characteristic function**.

ضع

$$t(x) = \inf|x-y| \qquad (y \in A)$$

و

$$g_n(x) = \frac{1}{1+nt(x)} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

عندها فإن $g_n(x)$ مستمرة في $[a,b]$، $g_n(x) = 1$ في A، $g_n(x) \to 0$ في B، حيث أن $B = [a,b] - A$. إذن

$$\|g_n - K_A\| = \left\{\int_B g_n^2\,dx\right\}^{1/2} \to 0$$

استناداً إلى المبرهنة ١١، ٣٢. بالإمكان تقريب الدوال المميزة للمجموعات المغلقة في $\mathcal{L}^2$ بدوال مستمرة.

استناداً إلى (٣٩) فإن نفس الشيء يصح بالنسبة للدالة المميزة لأي مجموعة قابلة للقياس، وإذن بالنسبة للدوال البسيطة القابلة للقياس أيضاً.

إذا كان $f \geq 0$ و $f \in \mathcal{L}^2$، لتكن $\{s_n\}$ متتالية متزايدة ترتيبياً للدوال البسيطة الغير سلبية القابلة للقياس بحيث أن $s_n(x) \to f(x)$. بما أن $|f-s_n|^2 \leq f^2$، فإن المبرهنة ١١، ٣٢ تبين أن $\|f-s_n\| \to 0$.

تستنتج الحالة العامة بعد ذلك.

١١، ٣٩ تعريف: نقول أن متتالية الدوال المركبة $\{\phi_n\}$ هي دوال مجموعة متعامدة في الفضاء القابل للقياس X إذا كانت

$$\int_X \phi_n \bar{\phi}_m d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n \neq m). \end{cases}$$

بشكل خاص، يجب أن يكون لدينا $\phi_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ وإذا كانت

$$c_n = \int_X f \bar{\phi}_n d\mu \qquad (n = 1,2,3,\dots),$$

فإننا نكتب

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n ,$$

كما في التعريف ١٠، ٨.

يتم توسيع متسلسلات فورير المثلثية بنفس الطريقة إلى $\mathcal{L}^2$ (أو حتى $\mathcal{L}$) في $[-\pi, \pi]$. تتحقق المبرهنتان ٨، ١١ و ٨، ١٢ (متباينة بسل **Bessel inequality**) بالنسبة إلى $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. إن البراهين متشابهة، كلمة بكلمة.

نستطيع الآن برهنة مبرهنة بارسيفال **Parseval theorem**.

١١، ٤٠ مبرهنة: *لنفترض أن*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} , \tag{٩٩}$$

حيث أن $f \in \mathcal{L}^2$ في $[-\pi, \pi]$. لتكن s_n المجموع الجزئي النوني لـ (٩٩). عندها فإن

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0 , \tag{١٠٠}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx . \tag{١٠١}$$

البرهان: لنأخذ $\varepsilon > 0$. استناداً إلى المبرهنة ١١،٣٨، يوجد هنالك دالة مستمرة g بحيث أن

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

إضافة لذلك، من السهولة أن نلاحظ أن بإمكاننا ترتيبها بحيث أن $g(\pi) = g(-\pi)$. عندها فإنه بالإمكان توسيع g إلى دالة دورية مستمرة. استناداً إلى المبرهنة ٨، ١٦، يوجد هنالك

متعدد الحدود مثلثي T، لنقل من الدرجة N، بحيث أن

$$\|g - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

إذن، استناداً إلى المبرهنة ٨، ١١ (موسعة إلى $\mathcal{L}^2$)، $n \geq N$ تؤدي إلى أن

$$\|s_n - f\| \leq \|T - f\| < \varepsilon,$$

ونستنتج (١٠٠) من ذلك. نستنتج المعادلة (١٠١) من (١٠٠) كما في برهان المبرهنة ٨،١٦
.

نتيجة: *إذا كانت* $f \in \mathcal{L}^2$ *في* $[-\pi, \pi]$، *و إذا كانت*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

عندها فإن $\|f\| = 0$.

لذلك إذا امتلكت دالتين في $\mathcal{L}^2$ نفس متسلسلات فورير، فإنهما يختلفان على الأكثر في مجموعة المقياس صفر.

١١، ٤١ تعريف: لتكن f و $f_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$. نقول أن $\{f_n\}$ تتقارب إلى f في $\mathcal{L}^2(\mu)$ إذا كانت $\|f_n - f\| \to 0$. نقول أن $\{f_n\}$ متتالية كوشية في $\mathcal{L}^2(\mu)$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد هنالك عدداً صحيحاً N بحيث أن $m \geq N, n \geq N$ تؤديان إلى أن $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$.

١١، ٤٢ مبرهنة: *إذا كانت* $\{f_n\}$ متتالية كوشية في $\mathcal{L}^2(\mu)$، *عندها يوجد هنالك الدالة* $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ *بحيث أن* $\{f_n\}$ *تتقارب إلى* f *في* $\mathcal{L}^2(\mu)$.

بكلمة أخرى، فإن هذا يعني إن $\mathcal{L}^2(\mu)$ فضاءاً مترياً تاماً.

البرهان بما أن $\{f_n\}$ متتالية كوشية، نستطيع إيجاد المتتالية $\{n_k\}$, $k = 1,2,3,\ldots$، بحيث أن

$$\left\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\right\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1,2,3,\ldots).$$

نختار الدالة $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. استناداً إلى متباينة شوارز.

$$\int_X \left|g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})\right| d\mu \leq \frac{\|g\|}{2^k}.$$

إذن

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_X \left|g(f_{n_k}-f_{n_{k+1}})\right|d\mu \le \|g\|. \qquad (١٠٢)$$

استناداً إلى المبرهنة ١١، ٣٠، فإننا قد نبادل الجمع والتكامل في (١٠٢). يؤدي ذلك إلى أن

$$|g(x)|\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)\right| < +\infty \qquad (١٠٣)$$

في كل مكان تقريباً من X. لذلك فإن

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)\right| < +\infty \qquad (١٠٤)$$

في كل مكان تقريباً من X. و ذلك لأنه إذا كانت المتسلسلة في (١٠٤) متباعدة في المجموعة E للقياس الموجب، فإن بإمكاننا أن نأخذ $g(x)$ لتكن غير صفرية في المجموعة الجزئية E للقياس الموجب، وبذلك نحصل على تناقض لـ (١٠٣).

بما أن المجموع الجزئي لـ kth للمتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)),$$

التي تتقارب في كل مكان تقريباً من X، هو

$$f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_1}(x),$$

نلاحظ بأن المعادلة

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

تعرف $f(x)$ لجميع $x\in X$ تقريباً، وليس مهماً كيف تعرف $f(x)$ في النقاط المتبقية من X.

سوف نبين الآن أن هذه الدالة f تمتلك الخواص المطلوبة. لنأخذ $0<\varepsilon$، ونختار N كما مذكور في التعريف ١١، ٤١. إذا كانت $n_k > N$، فإن مبرهنة فاتو تبين أن

$$\left\|f-f_{n_k}\right\| \le \liminf_{i\to\infty}\left\|f_{n_i}-f_{n_k}\right\| \le \varepsilon .$$

لذلك فإن $f-f_{n_k}\in \mathcal{L}^2(\mu)$، و بما أن $f=(f-f_{n_k})+f_{n_k}$، فإننا نلاحظ إن $f\in \mathcal{L}^2(\mu)$.

كذلك، بما أن ε عشوائية،

$$\lim_{k\to\infty}\left\|f-f_{n_k}\right\| = 0 .$$

أخيراً، فإن المتباينة

$$\|f-f_n\| \le \|f-f_{n_k}\| + \|f_{n_k}-f_n\| \qquad (١٠٥)$$

تبين أن $\{f_n\}$ تتقارب إلى f في $\mathcal{L}^2(\mu)$ ؛ وذلك لأنه إذا أخذنا n و n_k كبيرتين بما فيه الكفاية، فإنه بالإمكان جعل كلاً من الحدين في الجانب الأيمن من (١٠٥) صغيرتين عشوائياً.

١١، ٤٣ مبرهنة ريس – فيشر The Riesz - Ficher theorem

لتكن $\{\phi_n\}$ متعامدة في X. أفترض أن تتقارب، وضع $s_n = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n$. عندها توجد هنالك دالة $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ بحيث أن $\{s_n\}$ تتقارب إلى f في $\mathcal{L}^2(\mu)$ ، وبحيث أن

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n .$$

البرهان: بالنسبة إلى $n > m$،

$$\|s_n - s_m\|^2 = |c_{m+1}|^2 + \cdots + |c_n|^2,$$

لذلك فإن $\{s_n\}$ متتالية كوشية في $\mathcal{L}^2(\mu)$. استناداً إلى المبرهنة ١١، ٤٢، يوجد هنالك الدالة $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ بحيث أن

$$\lim_{n \leftarrow \infty} \|f - s_n\| = 0 .$$

الآن، بالنسبة إلى $n > k$،

$$\int_X f\bar{\phi}_k d\mu - c_k = \int_X f\bar{\phi}_k d\mu - \int_X s_n \bar{\phi}_k d\mu,$$

لذلك فإن

$$\left|\int_X f\bar{\phi}_k d\mu - c_k\right| \le \|f - s_n\| \cdot \|\phi_k\| + \|f - s_n\|.$$

بترك $n \to \infty$، نلاحظ بأن

$$c_k = \int_X f\,\bar{\phi}_k d\mu \qquad (k = 1,2,3,\ldots),$$

وبهذا ينتهي البرهان.

١١ ، ٤٤ تعريف: يقال للمجموعة المتعامدة $\{\phi_n\}$ بأنها *تامة complete* إذا،كانت المعادلات، بالنسبة إلى $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$

$$\int_X f\bar{\phi}_n d\mu = 0 \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

تؤدي إلى أن $\|f\| = 0$.

استنتجنا في نتيجة المبرهنة ١١، ٤٠ تامية النظام المثلثي من معادلة بارسيفال (١٠١).
وبالعكس، تتحقق معادلة بارسيفال لكل مجموعة تامة متعامدة:

١١، ٤٥ مبرهنة: *لتكن* $\{\phi_n\}$ *مجموعة تامة متعامدة. إذا كانت* $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ و

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n , \tag{١٠٦}$$

عندها فإن

$$\int_X |f|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 . \tag{١٠٧}$$

البرهان: استناداً إلى متباينة بيسيل **Bessel inequality**، $\sum |c_n|^2$ تتقارب. بوضع

$$s_n = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n ,$$

تبين مبرهنة ريس – فيشر **Riesz-Fischer** أنه يوجد هنالك الدالة $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ بحيث أن

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n , \tag{١٠٨}$$

و بحيث أن $\|g - s_n\| \to 0$. إذن $\|s_n\| \to \|g\|$. بما أن

$$\|s_n\|^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 ,$$

لدينا

$$\int_X |g|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 . \tag{١٠٩}$$

الآن تبين (١٠٦)، (١٠٨)، وكون $\{\phi_n\}$ تامة، أن $\|f - g\| = 0$، لذلك فإن (١٠٩) تؤدي إلى (١٠٧).

بربط المبرهنتين ١١،٤٣ و ١١،٤٥، فإننا نصل إلى استنتاج مهم جداً وهو أن كل مجموعة تامة متعامدة تسبب تراسل 1-1 بين الدوال $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (محددة بذلك الدوال المتساوية في كل مكان تقريباً) من جهة والمتتاليات $\{c_n\}$ التي تتقارب فيها $\sum |c_n|^2$ من جهة أخرى. يبين التمثيل

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n ,$$

سوية مع معادلة بارسيفال **Parseval equation**، إنه قد يصار إلى اعتبار $\mathcal{L}^2(\mu)$ فضاءً إقليدياً غير منتهي – الأبعاد (ما يطلق عليه "فضاء هلبرت" "**Hilbert space**")، الذي تمتلك فيه النقطة f الإحداثيات c_n، والدوال ϕ_n هي المتجهات الإحداثية.

التمارين EXERCISES

١- إذا كانت $f \geq 0$ و $\int_E f\, d\mu = 0$، برهن أن $f(x) = 0$ في كل مكان تقريباً من E.

تلميح: لتكن E_n المجموعة الجزئية لـ E التي يكون فيها $f(x) > 1/n$. اكتب $A = \bigcup E_n$. عندها فإن $\mu(A) = 0$ إذا وإذا فقط كانت $\mu(E_n) = 0$ لكل n.

٢- إذا كان $\int_A f\, d\mu = 0$ لكل مجموعة جزئية قابلة للقياس A لمجموعة قابلة للقياس E، فإن $f(x) = 0$ في كل مكان تقريباً في E.

٣- إذا كانت $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس، برهن أن مجموعة النقاط x التي تتقارب فيها $\{f_n(x)\}$ تكون قابلة للقياس.

٤- إذا كانت $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في E و g مقيدة وقابلة للقياس في E، فإن $fg \in \mathcal{L}(\mu)$ في E.

٥- ضع

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 1 & (\frac{1}{2} < x \leq 1), \end{cases}$$

$$f_{2k}(x) = g(x) \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

$$f_{2k+1}(x) = g(1-x) \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

بين أن

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

ولكن

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \tfrac{1}{2}.$$

[قارن مع (٧٧).]

٦- لتكن

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (|x| \leq n), \\ 0 & (|x| > n). \end{cases}$$

فإن $f_n(x) \to 0$ بانتظام في $\mathbf{R}^1$، ولكن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n\, dx = 2 \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

(إننا نكتب $\int_{-\infty}^{\infty}$ محل $\int_{R^1}$). لذلك فإن التقارب المنتظم لا يؤدي إلى تقارب مهيمن بمفهوم المبرهنة ١١، ٣٢. على الرغم من ذلك،فإن متتاليات التقارب المنتظم للدوال المقيدة تحقق المبرهنة ١١، ٣٢ في مجموعات القياس المنتهي.

٧- أوجد الشرط ألازم والكافي لأن $f \in \Re(\alpha)$ في $[a,b]$. *تلميح:* لاحظ المثال ١١، ٦ (ب) و المبرهنة ١١، ٣٣.

٨- إذا كانت $f \in \Re$ في $[a,b]$ وإذا كانت $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$، برهن أن $F'(x) = f(x)$ في كل مكان تقريباً من $[a,b]$.

٩- برهن أن الدالة F المقدمة في (٩٦) تكون مستمرة في $[a,b]$.

إذا كانت $\mu(X) < +\infty$ و $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ في X، برهن أن $f \in \mathcal{L}(\mu)$ في X.إذا كانت

$$\mu(X) = +\infty,$$

فإن ذلك خاطئاً. على سبيل المثال، إذا كانت

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|},$$

فإن $f \in \mathcal{L}^2$ في $\mathbf{R}^1$، ولكن $f \notin \mathcal{L}$ في $\mathbf{R}^1$.

١٠- إذا كانت $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ في X، عرف المسافة بين f و g بـ

$$\int_X |f - g| d\mu.$$

برهن أن $\mathcal{L}(\mu)$ فضاءاً مترياً تاماً.

١١- افترض أن

(أ) $|f(x,y)| \le 1$ إذا كانت $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$،

(ب) بالنسبة إلى x الثابتة، تكون $f(x,y)$ دالة مستمرة في y،

(ج) بالنسبة إلى y الثابتة، تكون $f(x,y)$ دالة مستمرة في x.

ضع

$$g(x) = \int_0^1 f(x,y)dy \qquad (0 \le x \le 1).$$

هل أن g مستمرة ؟

١٢- لاحظ الدوال

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (n = 1,2,3,\ldots,-\pi \le x \le \pi)$$

كنقاط إلى L^2 . برهن أن مجموعة هذه النقاط تكون مغلقة ومقيدة، ولكن ليست متراصة.

١٣- برهن أن الدالة المركبة f تكون قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت $f^{-1}(V)$ قابلة للقياس لكل مجموعة مفتوحة V في المستوي.

١٤- لتكن $\Re$ الحلقة لجميع المجموعات الجزئية الأولية لـ $[0,1]$. إذا كانت $0 < a \le b \le 1$، عرف

$$\phi([a,b]) = \phi([a,b)) = \phi((a,b]) = \phi((a,b)) = b-a$$

ولكن عرف

$$\phi((0,b)) = \phi((0,b]) = 1+b$$

إذا كانت $0 < b \le 1$. بين أن ذلك يعطينا دالة مجموعة تجميعية ϕ في $\Re$، والتي ليست منتظمة ولا يمكن توسيعها إلى مجموعة دالة قابلة للعد التجميعي في الحلقة $-\sigma$.

١٥- افترض أن $\{n_k\}$ متتالية متزايدة للأعداد الصحيحة الموجبة، وإن E مجموعة جميع $x \in (-\pi,\pi)$ التي يتقارب فيها $\{\sin n_k x\}$. برهن أن $m(E)=0$. تلميح: لكل $A \subset E$،

$$\int_A \sin n_k x \to 0,$$

و

$2\int_A (\sin n_k x)^2\, dx = \int_A (1-\cos 2n_k x)dx \to m(A)$ عندما $k \to \infty$.

١٦- افترض أن $E \subset (-\pi,\pi)$، $m(E) > 0$، $\delta > 0$. استخدم متباينة بيسل لبرهنة أنه يوجد هنالك على الأكثر العديد من الأعداد الصحيحة المنتهية n بحيث أن $\sin nx \ge \delta$ لجميع $x \in E$.

١٧- افترض أن $f \in L^2(\mu)$، $g \in L^2(\mu)$. برهن أن

$$\left|\int f\bar{g}d\mu\right|^2 = \int |f|^2 d\mu \int |g|^2 d\mu$$

إذا وإذا فقط كان يوجد هنالك الثابت c بحيث أن $g(x) = cf(x)$ في كل مكان تقريباً.

(قارن مع المبرهنة ١١، ٣٥).

الدليــل

- سجل المراجع
- قائمة بالرموز الخاصة
- دليل إنكليزي - عربي
- دليل عربي - إنكليزي

BIBLIOGRAPHY

ARTIN, E.:"*The Gamma Function,*" Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

BOAS, R. P.:"*A Primer of Real Functions,*" Carus Mathematical Monograph No. 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

BUCK, R. C. (ed.): "*Studies in Modern Analysis,*" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.

________:"*Advanced Calculus,*" 2nd ed., McGraw-Hill book Company, New York, 1965.

BURKILL, J. C.: "*The Lebesgue Integral,*" Cambridge University Press, New York, 1951.

DIEUDNNE, J.: "*Foundations of Modern Analysis,*" Academic Press, Inc., New York, 1960.

FLEMING, W. H.: "*Functions of Several Variables,*" Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

GRAVES, L. M. : "*The Theory of Functions of Real Variables,*" 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

HALMOS, P. R.: "*Measure Theory,*" D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, and N. J., 1950.

________: "*Finite-dimensional Vector Spaces,*" 2nd ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, and N. J., 1958.

HARDY, G. H.: "*Pure Mathematics,*" 9th ed., Cambridge University Press, New York, 1947.

________ And ROGOSINSKI, W.: "*Fourier Series,*"2nd ed., Cambridge University Press, New York, 1950.

HERSTEIN, I. N.:"*Topics in Algebra,*" Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

HEWITT, E., and STROMBERG, K.: "*Real and Abstract Analysis,*" Springer Publishing Co., Inc., New York, 1965.

KELLOGG, O. D.: "*Foundations of Potential Theory,*" Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1940.

KNOPP, K.: "*Theory and Application of Infinite Series,*" Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1928.

LANDAU, E. G. H.: "*Foundations of Analysis,*" Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

MCSHANE, E., J.: "*Integration,*" Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

NIVEN, I. M.: "*Irrational Numbers,*" Carus Mathematical Monograph No. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.

ROYDEN, H. L.: "*Real Analysis,*" The Macmillan Company, New York, 1963.

RUDIN, W.: "*Real and Complex Analysis,*" 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

SIMMONS, G. F.: "*Topology and Modern Analysis,*" McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

SINGER, I., M., and THORPE, J. A.: "*Lecture Notes on Elementary and Geometry,*" Scott, Foresman and Company, Glenview, 111. 1967.

SMITH, K.T.: "*Primer of Modern Analysis,*" Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.

SPIVAK, M.: "*Calculus on Manifolds,*" W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

THURSTON, H.A.: "*the Number System,*" Blackie & Son, Ltd., London - Glasgow , 1956.

قائمة بالرموز الخاصة
List Of Special Symbols

نبين أدناه قائمة بالرموز المستخدمة ومعانيها ورقم الصفحة التي تم تعريفها فيها أو ظهرت في الكتاب لأول مرة .

تنتمي إلى	Belongs to		١٩
لا تنتمي إلى	Dose not belong to	$\notin$	١٩
إشارتي الاحتواء	Inclusion signs	$\subset\ ,\ \supset$	١٩
الحقل النسبي	Rational field	$\mathbf{Q}$	١٩
إشارات تباين	Inequality signs	$<,\leq,>,\geq$	١٩
أصغر قيد علوي	Lest upper bound	sup	٢٠
أكبر قيد سفلي	Greatest lower bound	inf	٢٠
الحقل الحقيقي	Real field	$\mathbf{R}$	٢٦
ما لا نهايات	Infinities	$+\infty,-\infty,\infty$	٥٣،٣١
مرافق العدد العقدي	Complex conjugate	$\bar{z}$	٣٣
الجزء الحقيقي	Real part	$\mathrm{Re}(z)$	٣٣
الجزء الخيالي	Imaginary part	$\mathrm{Im}(z)$	٣٣
قيمة مطلقة	Absolute value	$\|z\|$	٣٣
إشارة جمع	Summation sign	$\sum$	٩٤،٣٤
فضاء اقليدي من النمط $k-$	Euclidean k-space	$\mathbf{R}^k$	٣٥
متجه الخمود (المتجه الصفري)	Null vector	$\mathbf{0}$	٣٥
حاصل الضرب الداخلي، الجداء الداخلي	Inner product	$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$	٣٦
معيار (نظيم) المتجه $\mathbf{x}$	Norm of vector $\mathbf{x}$	$\|\mathbf{x}\|$	٣٦
متتالية (متتابعة)	sequence	$\{x_n\}$	٥١
اتحاد	Union	$\bigcup,\cup$	٥٣،٥٢
تقاطع	intersection	$\bigcap,\cap$	٥٣
قطعة	segment	(a,b)	٥٨
فترة	interval	$[a,b]$	٥٨
متممة E	Complement of E	E^c	٥٩
نقاط غاية E	Limit points of E	E'	٦٣

٦٣	$\overline{E}$	Closure of *E*	انغلاق E
٨١	lim	limit	غاية
٨١،١٤٢	$\to$	Converges to	تقارب إلى
٩١	$\limsup$	Upper limit	غاية عليا
٩١	$\liminf$	Lower limit	غاية سفلى
١٢٨	$g \circ f$	composition	تركيب
١٣٨	$f(x+)$	Right- hand limit	غاية يمنى
١٣٨	$f(x-)$	Left-hand limit	غاية يسرى
١٥٣،١٦٢	$f', \mathbf{f}'(\mathbf{x})$	Derivatives	مشتقات
١٧٧،١٧٨	$U(P,f), U(P,f,\alpha),$ $L(P,f), L(P,f,\alpha)$	Riemann sums	مجاميع ريمانية
١٧٨،١٧٩	$\Re, \Re(\alpha)$	Classes of Rieman (stieltjes) integral functions	صنوف الدوال القابلة للتكامل ريمان (ستيلجر)
٢١٣	$\mathcal{C}\ (X)$	Space of continuous functions	فضاء الدوال المستمرة
٢٠٠،٢١٣،٤٣٤	$\\| \ \\|$	norm	معيار (نظيم)
٢٥١	exp	Exponential function	دالة آسيه
٢٦٢	D_N	Dirichlet kernel	نواة دير جلنت ديركليت
٢٦٦	$\Gamma(x)$	Gamma function	دالة كاما
٢٨٤	$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$	Standard basis	أساس قياسي
،٢٨٧	$L(X), L(X,Y)$	Space of linear transformations	فضاء التحويلات الخطية
٢٩٠	$[A]$	matrix	مصفوفة
٢٩٧	$D_j f$	Partial derivative	مشتقة جزئية
٢٩٩	∇f	Gradient	ميل (للمتجهات)
٣٠١،٣٠٢،٣٢١	$\mathcal{C}', \mathcal{C}''$	Classes of differentiable functions	صنوف الدوال القابلة للتفاضل
٣١٨	$\det[A]\ \det[A]$	Determinant	محددة
٣٢٠	$J_f(\mathbf{x})$	Jacobian	يعقوبي ، الجاكوبي
٣٢١	$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$	Jacobian	الجاكوبي يعقوبي
٣٣٧	I^k	*k*-cell	خلية من النمط - k
٣٣٩	Q^k	*k*-simplex	مفردة من النمط _k (مفردة-k)
٣٥١	dx_I	Basic *k*- form	الصيغة من النمط - k الأساسية
٣٤٧	$\wedge$	Multiplication symbol	رمز ضرب (اجداء)

٣٥٤	d	**Differentiation operator**	مؤثر تفاضل
٣٥٧	ω_T	**Transform of ω**	منقول (تحويل) ω
٣٦٦	∂	**Boundary operator**	مؤثر قيدي
٣٨٠	$\nabla \times \mathbf{F}$	**curl**	لفة
٣٨١	$\nabla \cdot \mathbf{F}$	**divergence**	تباعد
٤٠٠	$\mathcal{R}$	**Ring of elementary sets**	حلقة المجموعات القابلة للقياس
٤١٥،٤٠٠	m	**Lebesgue measure**	مقياس لبيك
٤١٥،٤٠٨	μ	**measure**	مقياس
٤١٤	$\mathcal{M}_F , \mathcal{M}$	**Families of measurable sets**	عوائل المجموعات القابلة للقياس
٤١٧	$\{x \mid P\}$	**Set with property P**	المجموعة ذات الخاصية P
٤١٨	f^+, f^-	**Positive(negative)part of f**	الجزء الموجب (السالب) من f
٤٢٠	K_E	**Characteristic function**	الدالة المميزة
٤٢٣،٤٣٣، ٤٣٤	$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}(\mu)$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^2(\mu)$	**Classes of Lebesgue-integrable**	صفوف الدوال القابلة للقياس لتكامل لبيكياً

Index (فهرست) الدليل
English - Arabic إنكليزي - عربي

Abel, N. H.	آبيل (عالم الرياضيات آبيل)
Absolute convergence,	تقارب مطلق
of integral,	للتكامل (تقارب مطلق)
Absolute value,	القيمة المطلقة
Addition (*see* sum)	الجمع (راجع المجموع)
Addition formula,	صيغة الجمع
Additivity,	تجميع
Affine chain,	سلسلة متآلفة (أفينية)
Affine mapping,	تطبيق متآلف (أفيني)
Affine simplex,	مفردة متآلفة
Algebra,	جبرياً
self-adjoint,	متجاور - ذاتي
uniformly closed ,	مغلق بانتظام
Algebraic numbers,	أعداد جبرية
Almost everywhere,	في كل مكان تقريباً
Alternating series,	متسلسلات متناوبة
Analytic function,	دالة تحليلية
Anticommutative law,	قانون ضد التبادل
Arc,	قوس
Area element,	عنصر مساحة
Arithmetic means,	معدلات حسابية
Artin. E..	آرتين إي.
Associative law ,	قانون التجميع
Axioms,	بديهيات
Baire' s theorem,	مبرهنة بيري
Ball,	كرة
Base,	أساس
Basic form,	صيغة أساسية

Basis,	أسسيه
Bellman,R.,	بيلمان . آر.
Bessel inequality,	متباينة بيسيل
Beta function,	دالة بيتا
Binomial series,	متسلسلة ذات الحدين
Bohr-Mollerup theorem,	مبرهنة بور – موليرب
Borel-measurable function,	دالة بوريل القابلة للقياس
Borel set,	مجموعة بوريل
Boundary,	قيدية
Bounded convergence,	تقارب مقيد
Bounded function,	دالة مقيدة
Bounded sequence,	متتالية مقيدة ، متتابعة مقيدة
Bounded set,	مجموعة مقيدة
Brouwer's theorem,	مبرهنة برورّ
Buck, R. C.,	بـــك . آر. سي.
Cantor,G.,	كانتور. جي.
Cantor set,	مجموعة كانتور
Cardinal number,	عدد أصلي
Cauchy criterion,	قاعدة كوشي (معيار كوشي، فصيلة كوشي)
Cauchy sequence,	متتالية كوشية (متتابعة)
Cauchy's condensation test,	اختبار التركيز الكوشي
Cell,	خليـــة
C'' C'' **- equivalence,**	تكافؤ من النمط – C''
Chain,	سلسلة
affine,	متآلفة (أفينية)
differentiable,	قابلة للتفاضل
Chain rule,	قاعدة السلسلة
Change of variables,	تغيير المتغيرات
Characteristic function,	دالة مميزة
Circle of convergence,	دائرة التقارب
Closed curve,	منحني مغلق
Closed form,	صيغة مغلقة

Closed set,	مجموعة مغلقة
Closure,	انغلاق أو غلق
uniform,	منتظم
Collection,	طائفة
Column matrix,	مصفوفة عمودية
Column vector,	متجه عمودي
Cone	مخروط
Common refinement,	تصفية مشتركة (تنعيم مشترك)
Commutative law,	قانون التبادل
Compact metric space,	فضاء متري متراص
Compact set,	مجموعة متراصة
Comparison test,	اختبار المقارنة
Complement,	متمم
Complete metric space,	فضاء متري تام
Complete orthonormal set,	مجموعة التعامد التام (معيارية متعامدة تامة)
Completion,	إتمام
Complex field,	حقل مركب (عقدي)
Complex number,	عدد عقدي
Complex plane.	مستوي مركب (عقدي)
Component of a function,	مكونات الدالة (مركبات الدالة)
Composition,	تركيب
Condensation point,	نقطة تركيز (المكثفة)
Conjugate,	ترافق
Connected set,	مجموعة مترابطة (متصلة)
Constant function,	دالة ثابتة
Continuity,	استمرارية
uniform,	انتظام (منتظم)
Continuous functions, space of,	فضاء الدوال المستمرة
Continuous mapping,	تطبيق مستمر
Continuously differentiable curve,	منحني قابل للتفاضل
Continuously differentiable mapping,	تطبيق قابل للتفاضل
Contraction,	تقلص،انكماش
Convergence,	تقارب

absolute,	مطلق
bounded,	مقيد
dominated,	مهيمن
of integral,	للتكامل
pointwise,	نقطي
radius of,	نصف قطرا لـ
of sequences,	للمتتاليات
of series,	للمتسلسلات
uniform,	منتظم
Convex function,	دالة محدبة
Convex set.	مجموعة محدبة
Coordinate function.	دالة إحدالية
Coordinates.	إحداليات
Countable additivity.	قابلة للعد التجميعي
Countable base.	أساس قابل للعد
Countable set.	مجموعة قابلة للعد
Cover.	غطاء
Cunningham. F.	كننكهام أف
Curl.	لفة
Curve.	منحني
closed.	مغلق
continuously Differentiable.	قابل للتفاضل باستمرار
rectifiable.	قابل للتصفية
space-filling.	ملء الفضاء
Cut.	قطع
Davis. P. J.	ديفس بي زجي
Decimals.	كسور عشرية (مراتب عشرية)
Dedekind R.	ديكاند آر
Dense subset.	مجموعة جزئية كثيفة
Dependent set.	مجموعة تابعة مرتبطة (معتمدة)
Derivative.	مشتقة
directional.	موجهة
of a form.	من الصيغة

of higher order.	من الرتبة الأعلى
of an integral	للمتكامل
integration of.	تكامل لـ
partial.	جزئية
of power series.	متسلسلة قوى
total.	مجموع ،إجمالي ،جملة
of a transformation.	التحويل
of a vector-valued function.	الدالة القيمة-المتجهة
Determinant.	محدد
of an operator.	المؤثر
product of.	جداء الـ،حاصل ضرب الـ
Diagonal process.	معالجة قطرية،أسلوب ،عملية
Diameter.	قطر
Differentiable function.	دالة قابلة للتفاضل
Differential.	متفاضل (مفاضل)
Differential equation.	معادلة تفاضلية
Differential form (*see* form).	صيغة تفاضلية(راجع الصيغة)
Differentiation (*see* derivative).	التفاضل (راجع المشتقات)
Dimension.	بعد
Directional derivative.	مشتقة موجهة
Dirichlet's kernel.	نواة ديرجليت
Discontinuities.	تفاصل ، عدم الاستمرارية، عدم الاتصال
Disjoint sets.	مجموعات منفصلة
Distance.	مساحة
Distributive law.	قانون التوزيع
Divergence	تباعد
Divergence theorem.	مبرهنة التباعد
Divergent sequence.	متتالية متباعدة (متابعة)
Divergent series.	متسلسلات متباعدة
Domain.	منطلق ، حيز ، منطقة ، ساحة
Dominated convergence theorem.	مبرهنة التقارب المهيمن
Double sequence.	متتالية مضاعفة (متابعة)

e.	e (اساس الوغارتم الطبيعي
Eberlein. W. F.	ايبرلن دبليو.اف
Elementary set .	مجموعة أولية (أساسية)
Empty set.	مجموعة فارغة،مجموعة خالية
Equicontinuity.	الاستمرارية المتساوية
Equivalence relation.	علاقة تكافؤ
Euclidean space.	فضاء اقليدي
Euler' s constant.	ثابت اولر
Exact form.	صيغة دقيقة (مضبوطة)
Existence theorem .	مبرهنة الوجود، مبرهنة التواجد
Exponential function.	دالة أسية
Extended real number system.	(نظام) المنظومة الموسعة للأعداد الحقيقية
Extension.	توسيع ، مد
Family.	عائلة ، جملة ، فصيلة
Fatou' s theorem.	مبرهنة فاتو
Fejer' s kernel.	نواة فيجر
Fejer' s theorem.	مبرهنة فيجر
Field axioms.	بديهيات الحقل
Fine.N.J.	فاين إن جي
Finite set.	مجموعة منتهية
Fixed point.	نقطة صامدة
theorems.	مبرهنات (النقطة الصامدة)
Fleming.W.H.	فليمنك دبل يو .اج
Flip.	انقلاب ، ينقلب
Form.	صيغة-شكل
basic	أساسية
of class C' , C''.	من الصنف C'' , C'
closed.	مغلقة
derivative of.	مشتقة ألـــ
exact.	دقيقة
product of.	حاصل ضرب ألـــ
sum of.	مجموع ألـــ

Fourier.J.B	فوريير.جي .بي
Fourier coefficients.	معاملات فوريير
Fourier series.	متسلسلات فوريير
Function.	دالة ، تطبيق ، تابع
absolute value.	قيمة مطلقة
analytic.	تحليلية
Borel-measurable.	قابلة لقياس بوريل
bounded.	مقيدة
characteristic.	مميزة
component of.	مركب
constant.	ثابتة
continuous.	مستمرة
from left.	من اليسار
from right.	من اليمين
continuously differentiable.	قابلة للتفاضل ومشتقاتها مستمرة
convex.	محدبة
decreasing.	متناقصة
differentiable.	قابلة للتفاضل
exponential.	أسية
harmonic.	توافقية
increasing.	متزايدة
inverse.	عكسية (نظيرة)
Lebesgue-integrable.	قابلة لتكامل ليبك
limit.	غاية
linear.	خطية
logarithmic	لوغاريتمية
measurable	قابلة للقياس
monotonic.	رتيبة
Nowhere Differentiable	غير قابلة في إي مكان للتفاضل
one-to-one.	واحد-لـ- واحد (متباين)
orthogonal.	متعامدة-متناصبة
periodic.	دوريه

product of.	حاصل ضرب ألـ (جداء)
rational.	نسبية
Riemann-integrable.	قابلة للتكامل الريمانياً
simple.	بسيطة
sum of.	مجموع ألـ
summable.	قابلة للجمع
trigonometric.	مثلثية
uniformly	مستمرة بانتظام
differentiable.	قابلة للتفاضل بانتظام
vector-valued.	ذات قيمة متجه
Fundamental theorem of Calculus.	المبرهنة الأساسية للتفاضل والتكامل
Gamma function.	دالة كاما
Geometric series.	متسلسلة هندسية
Gradient.	ميل -تدرج
Graph.	رسم بياني -بيان
Greatest lower bound.	القيد السفلي الأعظم - الأكبر
Green's identities.	متطابقات كرين
Green's theorem.	مبرهنة كرين
Half-open interval.	فترة نصف- مفتوح
Harmonic function.	دالة توافقية
Havin. V. P.	هيفن.في.بي
Heine-Borel theorem.	مبرهنة هاين- بوريل
Helly's selection theorem.	مبرهنة اختيار هيلي
Herstein. I. N.	هيرستاين.آي .أن
Hewitt. E.	هيوت.أي
Higher-order derivative.	مشتقة الدرجة الأعلى
Hilbert space.	فضاء هلبرت
Holder's inequality.	متباينة هولدر
i,	i
Identity operator.	المؤثر المتطابق- الاجراء المتطابق- مؤثر محايد
Image.	صورة
Imaginary part.	الجزء التخيلي-الخيالي

Implicit function Theorem.	مبرهنة الدالة الضمنية ، ضامنة
Improper integral.	متكامل غير اعتيادي
Increasing index.	دليل متزايد
Increasing sequence.	متتالية متزايدة (متتابعة)
Independent set.	مجموعة مستقلة
Index of a curve.	دليل المنحني
Infimum.	أكبر قيمة صغرى
Infinite series.	متسلسلة لانهائية، متسلسلة غير منتهية
Infinite set.	مجموعة لانهائية، مجموعة غير منتهية
Infinity.	لانهائية ، غير منتهية
Initial-value problem.	مسألة القيمة الابتدائية، مشكلة القيمة الابتدائية
Inner product.	جداء داخلي ، حاصل الضرب الداخلي
Integrable functions, spaces of.	فضاءات الدوال القابلة للتكامل
Integral :	متكامل
countable additively Of.	قابلة للعد التجميعي ألـ
differentiation of.	تفاضل ألـ
Lebesgue.	لبيك
lower	سفلي
Riemann	ريمان
Stieltjes	ستلجز
upper	علوي
Integral test.	اختبار التكامل
Integration :	تكامل:
of derivative.	المشتقة
by parts.	بالتجزئة
Interior.	(داخلي) داخل المنطقة الداخلية
Interior point.	نقطة داخلية
Intermediate value.	قيمة وسيطية
Intersection.	تقاطع
Interval.	فترة
Into.	في
Inverse function.	دالة عكسية (نظيرة)
Inverse function theorem .	مبرهنة الدالة العكسية

Inverse image.	صورة عكسية
Inverse of linear operator.	معكوس المؤثر الخطي (نظير المؤثر الخطي)
Inverse mapping.	تصوير عكسي (تطبيق نظير)
Invertible transformation.	تحويل قابل للعكس (له نظير)
Irrational number.	عدد غير نسبي
Isolated point.	نقطة منعزلة
Isometry.	تقايس
Isomorphism.	تشاكل تقابلي
Jacobian.	جاكوبي (يعقوبي)
Kellogg. O. D.	كليوك او.أي
Kestelman.	كيستلمان.اج
Knopp. k..	نوء .كي
Landau. E. G. H..	لاندو أي .جي .غج
Laplacion.	لابلاسيان
Least upper bound.	قيد علوي أصغر (أصغر قيد علوي)
property.	خاصية
Lebesgue.H.L.,	لبيك . أج. أل.
Lebesgue-integrable function.	الدالة القابلة لتكامل – لبيك
Lebesgue integral.	متكامل لبيك
Lebesgue measure.	مقياس لبيك
Lebesgue's theorem.	مبرهنة لبيك
Left-hand limit.	الغاية اليسرى
Leibnitz.G.W.,	ليبنيتز .جي. دبل يو
Length.	طول
L'Hospital's rule.	قاعدة الـــ – هوبتيال
Limit.	غايـــة
left-hand.	يسرى
lower.	سفلي
pointwise.	نقطية
right-hand.	يمنى
subsequential .	لاحقة

upper.	عليا
Limit function.	دالة غاية
Limit point.	نقطة غاية
Line.	خط
Line integral.	متكامل خطي
Linear combination	توافيق خطية
Linear function.	دالة خطية
Linear mapping.	تطبيق خطي
Linear operator.	مؤثر خطي
Linear transformation.	تحويل خطي
Local maximum.	قيمة عظمى محلية أو نهاية كبرى محلية
Localization theorem.	مبرهنة التمركز (التموضع)
Locally one-to-one mapping.	تطبيق محلي واحد – لـ – واحد (متباين)
Logarithm.	لوغاريتم
Logarithmic function.	دالة لوغاريتمية
Lower bound.	حد سفلي
Lower integral.	تكامل سفلي
Lower limit.	غاية سفلى
Mcshane . E .J.,	مكشـــانك . إي. جي.
Mapping.	تطبيق
affine .	رنين
continuous.	مستمر
continuously differentiable.	قابل للتفاضل ومشتقاتها مستمرة
linear.	خطي
open.	مفتوح
primitive.	أولي
uniformly continuous.	مستمر بانتظام
(*see also* Function)	(راجع الـــ دالة أيضاً)
Matrix.	مصفوفة
product.	حاصل ضرب
Maximum.	قيمة عظمى أو نهاية عظمى
Mean square approximation.	تقريب الوسط التربيعي

Mean value theorem.	مبرهنة القيمة الوسطية
Measurable function.	دالة قابلة للقياس
Measurable set.	مجموعة قابلة للقياس
Measurable space	فضاء قابل للقياس
Measure.	مقياس ، قياس
outer.	خارجي
Measure space.	فضاء القياس
Measure zero .set of.	مجموعة المقياس الصفري (صفرية القياس)
Mertens . F.,	ميرتز . أف.
Metric space.	فضاء متري
Minimum .	قيمة صغرى
MŐbius band.	رباط مويّس ، شريط مويّس ، جولة
Monotone convergence theorem.	مبرهنة التقارب الرتيبة
Monotonic function.	دالة رتيبة
Monotonic sequence.	رتيبة
Multiplication (*see* Product)	عملية الضرب (راجع حاصل الضرب)
Negative number.	عدد سالب
Negative orientation.	توجه سلبي وجهة سلبية
Neighborhood.	جوار
Newton's method.	طريقة نيوتن
Nijenhuis. A,.	نيجينوس . أي.
Niven. I,.	نيفين . آي.
Nonnegative number.	عدد غير سلبي
Norm.	معيار ، نظيم
of operator.	للمؤثر
Normal derivative.	مشتقة عمودية ، ناظمية ، نظامية ، معيارية
Normal space.	فضاء معياري ، ناظمي ، عمودي
Normal vector	متجه معياري ، ناظمي ، عمودي
Nowhere differentiable function.	دالة غير قابلة للتفاضل في أي مكان
Null space.	فضاء الخمود ، فضاء تافه ، فضاء صفري
Null vector.	متجه الخمود ، متجه تافه ،متجه صفري
Number:	عدد

algebraic.	جبري
cardinal.	أصلي
complex.	عقدي
decimal.	عشري
finite.	منتهي
irrational.	غير نسبي
negative.	سالب
nonnegative.	غير سالب
positive.	موجب
rational.	نسبي
real.	حقيقي
One-to-one correspondence.	تناظر واحد- لـ - واحد ، تقابل (متباين)
Onto.	في ، إلى (تناظر شامل)
Open cover.	متجه مفتوح
Open mapping.	تطبيق مفتوح
Open set.	مجموعة مفتوحة
Order.	رتبة ،مرتبة،ترتيب
lexicographic.	معجمية
Order field.	حقل مرتب
k-tuple.	المضاعفات- k (نونية مرتبة)
pair	زوج
set.	مجموعة
Orineted simplex.	مفردة متوجهة ، مفردة موجهة
Origin.	نقطة الأصل
Orthogonal set of functions.	مجموعة الدوال المتعامدة ، (مجموعة متعامدة الدوال)
Orthogonal set.	مجموعة متعامدة
Outer measure.	مقياس خارجي، قياس خارجي
Parameter domain.	منطلق وسيط، ساحة وسيطة
Parameter interval.	فترة وسيطية ، فاصل وسط
Parseval's theorem	مبرهنة بارسيفال
Partial derivative.	مشتقة جزئية
Partial sum.	مجموع جزئي

Partition.	تجزئة
of unity.	للوحدة
Perfect set.	مجموعة تامة
Periodic function.	دالة دورية
π .	النسبة الثابتة ط π
Plane.	مستو
Poincaré's lemma.	مبرهنة تمهيدية بوينكر
Pointwise bounded sequence.	متتالية مقيدة نقطياً
Pointwise convergence.	تقارب نقطي
Polynomial.	متعددة الحدود ، حدودية، كثيرة الحدود
trigonometric.	مثلثي
Positive orientation.	توجه موجب
Power series.	متسلسلة القوة ، متسلسلة القدرة
Primes.	أعداد أولية
Primitive mapping.	تطبيق أولي
Product.	حاصل الضرب (الجداء)
Cauchy.	الكوشي
of complex numbers.	للأعداد العقدية
of determinants.	للمحددات
of field elements.	لعناصر الحقل
of forms.	للصيغ
of functions.	للدوال
inner.	الداخلي
of matrices.	للمصفوفات
of real numbers.	للأعداد الحقيقية
scalar.	الغير متجه (قياسي)
of series.	المتسلسلات
of transformations.	للتحويلات
Projection.	مسقط
Proper subset.	مجموعة جزئية فعلية
Radius.	نصف القطر
of convergence.	التقارب

Range.	مدى
Rank.	رتبة (للمصفوفات)
Rank theorem.	مبرهنة الرتبة
Ratio test.	الاختبار النسبي
Rational function.	دالة نسبية
Rational number.	عدد نسبي
Real field.	حقل حقيقي
Real line.	خط حقيقي
Real number.	عدد حقيقي
Real part.	جزء حقيقي
Rearrangement.	إعادة ترتيب
Rectifiable curve.	منحني قابل للتصفية
Refinement.	تصفية ، تنقيح ، تنعيم
Reflexive property.	الخاصية الانعكاسية
Regular set function.	دالة المجموعة المنتظمة
Relatively open set.	مجموعة مفتوحة نسبياً
Remainder.	المتبقي
Restriction.	تحديد ، تقييد ، تضييق' قصور
Riemann. B..	ريسمان . بي.
Riemann integral.	تكامل ريساني
Riemann-Stieltjes integral.	متكامل ريمان – ستيلجز
Riesz-Fischer theorem.	مبرهنة ريس – فيشر
Right-hand limit.	غاية يمنى
Ring.	حلقة
Robison. G. B..	ريسون .جي. بي.
Root.	جذر
Root test.	اختبار جذري
Row matrix.	مصفوفة صفية
Saddle point.	نقطة السرجية
Scalar product.	جداء داخلي، حاصل ضرب غير متجه (قياسي)
Schoenberg. I. J..	شوينبرج . آي. جي.
Schwaez inequality.	متباينة شوارز

Segment.	قطعة
Self-adjoint algebra.	جبرا متجاور ذاتياً
Separable space.	فضاء قابل للانفصال
Separated set.	مجموعة متباعدة
Separation of points.	فصل النقاط
Sequence.	متتالية ، متتابعة
bounded.	مقيدة
Cauchy.	كوشية
convergent.	متقاربة
divergent.	متباعدة
double.	مزدوجة
of functions.	من الدوال
increasing.	متزايدة
monotonic.	رتيبة
pointwise bounded.	مقيدة نقطياً
pointwise convergent.	متقاربة نقطياً
uniformly bounded.	مقيدة بانتظام
uniformly convergent.	متقاربة بانتظام
Series.	متسلسلة
absolutely convergent.	متقاربة بشكل مطلق
alternating.	متناوبة
convergent.	متقاربة
divergent.	متباعدة
geometric.	هندسية
nonabsolutely convergent.	متقاربة بشكل غير مطلق
power.	قوى،قدرة
product of.	حاصل ضرب الـ (القوى)
trigonometric.	مثلثية
uniformly convergent.	متقاربة بانتظام
Set.	مجموعة
at most countable.	قابلة للعد على الأكثر
Borel.	بوريل
bounded.	مقيدة

bounded above.	مقيدة من الأعلى
Cantor.	كانتور
closed.	مغلقة
compact.	متراصة
complete orthonormal.	تعامد تام ، تناصب
connected.	مترابطة
convex.	محدبة
countable.	قابلة للعد
dense	كثيفة
elementary	أولية
empty.	فارغة، خالية
finite.	منتهية
independent.	مستقلة
infinite.	لنهائية، غير منتهية
measurable.	قابلة للقياس
nonempty.	غير فارغة ، غير خالية
open.	مفتوحة
ordered.	مرتبة
perfect.	تامة
relatively open.	مفتوحة نسبياً
uncountable.	غير قابلة للعد
Set function.	دالة مجموعة
σ -ring.	حلقة من النمط – σ
Simple discontinuity.	غير مستمر بسيط، غير متصل بسيط
Simple function.	دالة بسيطة
Simplex.	مفردة
Affne.	متآلفة
differentiable.	قابلة للتفاضل
oriented.	متوجهه ، متوجيه
Singer. I. M.	سنكر آي زام
Solid angle.	زاوية مجسمة
Space:	فضاء

compact metric.	متري متراص
complete metric.	متري تام
connected.	مترابط
of continuous function.	الدوال المستمرة
eclidean.	اقليدي
Hilbert.	هلبرت
of integrable functions.	الدوال القابلة للتكامل
measurable.	قابل للقياس
measure.	قياس
metric.	متري
normal.	قابل للفصل
separable.	عمودي ، معياري ، ناظمي
Span.	امتداد ،السـاع
Sphere.	كرة
Spivak. M.,	سبيفاك .ام
Square root.	جذر تربيعي
Standard basis.	أساس قياسي
Standard presentation.	تمثيل قياسي
Standard simplex.	مفردة قياسية
Stark. E. L.,	ستارك.أي. ال
Step function.	دالة سلمية
Stieltjes integral.	متكامل ستيلجز
Stirling's formula.	صيغة ستيرلنك
Stokes' theorem.	مبرهنة ستوك
Stone-Weierstrass theorem.	مبرهنة ستون – ويرستراس
Stromberg. K.	سترو مبيرغ ،ك
Subadditivity.	التجميعية الجزئية
Subcover.	غطاء جزئي
Subfeld.	حقل جزئي
Subsequence.	متتابعة جزئية (لاحقة)
Subsequential limit.	غاية المتتابعة الجزئية
Subset.	مجموعة جزئية
dense.	مركزة (كثيفة)

proper.	فعلية
Sum,	مجموع
of complex number,	الأعداد العقدية
of field element,	عناصر الحقل
of forms,	الصيغ
of functions,	الدوال
of linear transformations,	التحويلات الخطية
of oriented simplexes,	المفردات التوجيه
of real numbers,	الأعداد الحقيقية
of series,	المتسلسلات
of vectors.	المتجهات
Summation by parts.	الجمع بالأجزاء
Support.	دعامـــة
Supremum.	أصغر قيمة عظمى ،أصغر نهاية عظمى، الأسمى
Supremum norm.	المعيار الأسمى ، معيار النهاية العظمى
Surface.	سطح
Symmetric difference.	فرق متناظر
Tangent plane.	مستو مماس
Tangent vector.	متجه مماس
Tangential component.	مركب مماسي
Taylor polynomial.	حدودية تيلور ، متعددة حدود تيلور
Taylor's theorem.	مبرهنة تيلور
Thorpe. J. A..	ثورب . جي. أي.
Thurston. H. A..	ثرستون . أج. أي.
Torus.	إطار (على شكل حلقة)
Total derivative.	مشتقة كلية
Transformation(*see* Function; Mapping)	تحويل (راجع الدالة ؛ تطبيق)
Transitivity .	الانتقالية
Triangle inequality.	متباينة المثلث
Trigonometric function.	دوال مثلثية
Trigonometric polynomial.	متعددة الحدود المثلث
Trigonometric series.	متسلسلات مثلثية

Uncountable set.	مجموعة غير قابلة للعد
Uniform boundedness.	تقييد منتظم
Uniform closure.	انغلاق منتظم
Uniform continuity.	استمرارية منتظمة
Uniform convergence.	تقارب منتظم
Uniformly closed algebra.	جبرياً مغلق بانتظام
Uniformly continuous mapping.	تطبيق مستمر بانتظام
Union.	اتحاد
Uniqueness theorem.	مبرهنة الوحدانية
Unit cube.	مكعب الوحدة
Unit vector.	متجه الوحدة
Upper bound.	حد علوي
Upper integral.	متكامل علوي
Upper limit.	غاية عليا
Value.	قيمة
Variable of integration.	متغير التكامل
Vector.	متجه
Vector field.	حقل المتجهات ، حقل متجه
Vector space.	فضاء متجه ، فضاء متجهات
Vector-valued function.	دالة القيمة – المتجهة
derivative of.	مشتقة الـ
Volume.	حجم
Weierstrass test.	اختبار ويرستراس
Weierstrass theorem.	مبرهنة ويرستراس
Winding number.	عدد لولبي
Zero set.	المجموعة الصفرية
Zeta function.	دالة زيـتا